EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

L'épreuve de mathématiques B du concours e3a filière PSI est constituée de 2 exercices indépendants.

THEMES MATHEMATIQUES

Dans le premier exercice on considère le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par : $P = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n$ où $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de **C** non tous nuls.

Le but de l'exercice est d'établir par deux sortes de méthodes différentes, algébriques puis analytiques, que pour toute racine complexe z de P on a l'inégalité suivante : $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Dans le deuxième exercice on considère l'équation différentielle (E_f) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = f(x)$ où f une application continue de **R** vers **R**. On prouve que si f est de plus périodique, l'équation différentielle (E_f) admet une unique solution réelle périodique.

Cet exercice est divisé en cinq parties :

- Etude de quelques propriétés élémentaires des applications périodiques
- Etude des sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$
- Détermination des solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples : f n'est pas périodique, $f(x)=0$, $f(x)=\cos x$
- Démonstration du résultat annoncé
- Détermination de la solution périodique de (E_f) dans un cas particulier en utilisant la théorie des séries de Fourier et les théorèmes permettant d'affirmer que la somme d'une série de fonctions est de classe C^2.

COMMENTAIRES

Ces deux exercices sont très guidés et rédigés de manière à ne bloquer aucun candidat.
De plus, de nombreuses questions étaient très immédiatement accessibles à un candidat maîtrisant son cours. On entend par là principalement : connaître avec précision les définitions, être capable de citer les théorèmes du cours et de les appliquer en vérifiant toutes les hypothèses.
Malheureusement trop souvent les théorèmes sont cités de façon incomplète, trop d'hypothèses sont sous-entendues, trop de calculs ne sont pas justifiés.
D'autre part beaucoup de raisonnements manquent cruellement de rigueur et de précision.
On constate notamment que :

- Seuls 35% des candidats donnent les solutions réelles de $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
- 20% des candidats déterminent une solution particulière de $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos x$

- Si le calcul des coefficients de Fourier dans la partie E de l'exercice 2 est plutôt bien maîtrisé, 20% des candidats citent correctement le théorème de la convergence normale d'une série de Fourier ou le théorème de Dirichlet
- Si la définition de la convergence normale d'une série de fonctions est connue par la majorité des candidats, 25% d'entre eux réussissent à prouver que $S=\sum u_n$ est de classe C^2. D'énormes difficultés apparaissent dès lors qu'il s'agit de majorer la valeur absolue ou le module d'une somme aussi bien dans la partie E de l'exercice 2 que dans la question 1° b) de la partie A de l'exercice 1. A ce propos le jury ne peut que déplorer que la notion de valeur absolue ait pratiquement disparu de l'enseignement secondaire.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles (cas linéaire) est peu connu et n'est pas compris. 5% des candidats l'invoquent à bon escient pour résoudre la question 1° a) ii) de la partie D de l'exercice 2.
- Le calcul du déterminant dans la partie A de l'exercice 1 est trop souvent l'occasion de multiples approximations et d'affirmations gratuites
- Dans la partie B de l'exercice 1, l'écrasante majorité des candidats affirme que le produit de deux fonctions strictement croissantes sur **R** est une fonction strictement croissante sur **R**
- Dans cette même partie le théorème des valeurs intermédiaires se réduit quelques fois à : « si h est continue sur un intervalle I alors l'équation $h(x)=0$ admet une solution sur I ».

CONCLUSION

Le jury recommande vivement aux futurs candidats de faire un très sérieux effort d'apprentissage et de compréhension du cours ; d'autant plus que l'auteur du sujet se réserve la possibilité d'inclure des questions de cours ou des applications directes du cours dans les épreuves à venir.