1.2 B - MATHÉMATIQUES I - filière PC

I) REMARQUES GÉNÉRALES

L'épreuve de cette année portait essentiellement sur l'algèbre linéaire. Elle a permis de bien évaluer les connaissances des candidats sur cette partie du programme.

Les résultats restent stables par rapport aux années précédentes ; la moyenne est légèrement supérieure à 8, les notes s'étalent de 0 à 20. On retrouve la proportion habituelle de très bonnes copies, et de très mauvaises (près de 10 % de notes ≤ 4).

Les observations qui suivent s'adressent surtout aux candidats qui ont été déçus par leurs résultats parce qu'ils pensaient mériter mieux.

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

1°) Dès la première question apparaissent des différences très nettes entre les copies : beaucoup ne voient pas qu'il convenait d'effectuer une interversion des indices dans une somme double, faute de quoi on ne pouvait que commettre des abus dans les majorations. Signalons au passage que lorsqu'on manipule le symbole max (ou sup), il vaut mieux raisonner sur un terme général de la famille pour effectuer les majorations, de manière à utiliser les propriétés des symboles max (ou sup), plutôt que de conserver les symboles max (ou sup) tout au long des calculs.

Chez les plus faibles, l'expression du terme général du produit de 2 matrices n'est pas donnée correctement dans le cas général.

Enfin, quoique cet abus se soit moins souvent présenté que par le passé, une écriture de la forme $\begin{array}{cc} & B \\ A & C \end{array}$ pour représenter le produit matriciel AB = C, est mauvaise car elle n'est en accord ni avec l'énoncé, ni avec les programmes officiels.

2°) L'expression du terme général du produit PJ_n n'est pas toujours donnée, faute de quoi on ne peut obtenir le résultat.

3°) Question facile mais il fallait quand même présenter le raisonnement par récurrence complètement (avec l'hypothèse de récurrence) et ne pas se contenter d'affirmer :

« De proche en proche on voit que… ».

Enfin il faut établir que les coefficients de P^k sont ≥ 0.

4°) La propriété Im a = Im a^2 n'est pas toujours donnée.

Une inégalité du type : rang (aa') $\leq$ min (rang a, rang a') doit être justifiée.

5°) Si l'étude de Im a $\cap$ ker a est souvent faite, par contre la propriété IR^n = Im a + ker a est rarement justifiée, faute de calculer dim (Im a + ker a) ; l'évaluation de dim Im a + dim ker a ne suffit pas à elle seule.

6°) Cette importante question, assez largement notée ainsi que le 8°, a permis de distinguer les candidats qui maîtrisaient les problèmes de changement de bases.

Il convenait de préciser le choix de la nouvelle base, si possible avec une notation, ainsi que le rôle des bases dans la définition de la matrice de passage. Parler de « base adaptée » sans autre précision est trop vague.

On aurait aimé que soit rappelée à cette occasion la définition de la matrice d'une application linéaire par rapport à des bases :

<u>Dans la 1ère colonne, on place les composantes du transformé du 1er vecteur de base</u>. B^{-1}

7°) Il fallait penser à introduire $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Evidemment, $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverses.

8°) Il convenait de rappeler la signification de la stabilité et de la vérifier sur les éléments. On ne peut se contenter d'affirmation du type :

« D'après le cours, on a le résultat ».

Pour ce qui est de la formule matricielle, il fallait avoir traité le 6°, et établir que Ker a $\subseteq$ Ker a'.

9°) Noyau et image de a a' sont souvent trouvés, mais plus rarement justifiés.

10°) Il suffisait, en liaison avec les questions précédentes, de montrer qu'il existe un unique projecteur de noyau et d'image donnés.

11°) Question facile.

12°) Question presque jamais traitée faute de penser à trigonaliser A dans le domaine complexe. De manière générale, dans cette question et la suivante, l'utilité de passer par les complexes n'a pas été comprise.

Signalons que la propriété Ker $a^2 \subseteq$ Ker a pouvait s'établir en restant dans le domaine réel :

Soit $x \in \text{Ker } A^2$ avec $A = I - P$; on a donc : $P^2X = 2\, PX - X$, et par récurrence sur k entier ≥ 1, $P^kX = k\, PX - (k-1)\, X$. Il en résulte : $\frac{1}{k} P^kX \to PX - X = 0$, $k \to +\infty$ car les P^k sont bornés $\forall k$. D'où $X \in \text{Ker } A$.

13°) Dans cette question, le théorème admis pouvait servir.

14°) La récurrence était facile et a souvent été faite. Par contre, on ne pouvait appliquer directement à des matrices des identités valables pour des scalaires, sauf dans le cas d'identités polynômiales.

15°) Formule un peu plus difficile, et plus rarement traitée. On pouvait utiliser les 6°, 8°, ou faire une récurrence sur k après avoir établi que : $(I - A)^k (I - A\,A') = I - A\,A'$.

16°) Question facile grâce au 15°. Il fallait justifier que les P^k étaient bornés $\forall k$.

17°) Il ne fallait pas oublier que les coefficients de $I - A\,A'$ doivent être ≥ 0.

18°) Rarement traitée, car en liaison avec le théorème admis, il fallait donner à X des valeurs particulières (les vecteurs de la base canonique par exemple).

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

En conclusion, on est amené à reprendre les conseils déjà donnés auparavant.

Il importe de soigner particulièrement les premières questions, car elles sont en général assez bien notées sans être les plus difficiles ; de plus le correcteur se fait une opinion sur ces questions.

Il est inutile de traiter ou d'aborder toutes les questions du problème pour obtenir une bonne note ; la qualité importe davantage.

Enfin, il faut viser la plus grande précision, si possible sans allonger exagérément la rédaction en explicitant la signification de certaines définitions (par exemple la définition de la matrice d'une application linéaire).

En ce qui concerne les copies les plus faibles citées au début, il semble que ces candidats font des impasses sur des parties du programme, ce qui est préjudiciable dans un concours de bon niveau.