EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 1

par **Alain CHAURÉ, Maitre de Conférences**
à l'Université de Reims

Remarques générales sur l'épreuve

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques 1 de la session 2007 propose une étude de la notion de racine carrée d'une matrice carrée réelle. Dans une première partie, on montre qu'une matrice donnée peut admettre une infinité de racines carrées ou n'en n'avoir aucune. La seconde partie établit l'existence et l'unicité d'une racine carrée symétrique positive de A lorsque A est symétrique positive et introduit la notion de valeur absolue d'une matrice symétrique réelle. Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude d'un algorithme de calcul de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.

Bien que l'épreuve ait été conçue pour être plus facile que celle des années précédentes et ne contienne pas de difficultés majeures, le niveau général des copies est décevant. La fin de la partie I et la partie II ont été en général mal traitées et les candidats qui ont abordé la partie III on essentiellement grapillé des points sur les questions faciles.

Voici les principaux reproches que l'on peut faire aux candidats.

Un manque de recul et de réflexion : les candidats ne lisent pas assez attentivement le sujet, ainsi certains confondent carré et racine carrée d'une matrice. De manière plus grave, ils ne cherchent pas à en comprendre la démarche : ainsi beaucoup croient pouvoir démontrer matriciellement le résultat de codiagonalisabilité de la question II.3 sans utiliser la question précédente. En II.5.e peu de candidats utilisent le fait que $\sqrt{S}$ est de la forme $aS + bI_n$. Beaucoup trop de candidats ne savent pas traduire correctement la diagonalisabilité d'une matrice A carrée d'ordre n dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: on a souvent droit à l'expression « A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ » au lieu de « A est semblable à $\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ avec pour tout i, $\mu_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ ».

Le nombre de matrices de passage non inversibles donne le frisson. Il n'y a guère que la matrice nulle qui n'ait pas été proposée, mais une colonne nulle ou deux colonnes identiques ne fait pas peur.

Souvent des raisonnements sont présentés comme des raisonnements par récurrence, alors qu'ils n'en sont pas : ce fut très fréquemment le cas à la question III.2.c

Un manque de rigueur : pour certains, il n'y a pas de différence entre appartenir à un sous-espace propre et être un vecteur propre. La surjectivité d'une application linéaire injective est justifiée en se contentant de dire qu'on est en dimension finie au lieu de préciser que les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finies égales entre elles.

Trop de candidats proposent un résultat deviné à la lecture de l'énoncé sans en donner de preuves, par exemple comme on a mis en évidence les valeurs propres 1 et $1 + 3a$ pour la matrice M_a, ce sont les seules (ces candidats n'imaginent sans doute pas qu'il puisse y avoir une troisième valeur propre) ou encore comme U n'a pas de racine carrée, $M_{-1/3}$ n'en a pas non plus ou encore l'application $M \longrightarrow PMP^{-1}$ est continue d'après les théorèmes généraux.

D'une manière générale, les candidats devraient bannir les expressions du type « il est évident que…, on voit bien que …, on montre facilement que… »

Un manque de technicité : la méthode pratique de détermination du rang d'une matrice par échelonnement n'est que trop rarement mise en oeuvre, si bien que les résultats de la toute première question du problème sont très fantaisistes, en particulier le cas $a = 0$ est fréquemment oublié. Pour beaucoup, une valeur propre n'existe que comme racine du polynôme caractéristique ; certains candidats font même deux fois le calcul du polynôme caractéristique, d'abord dans le cas général avec a quelconque, puis ensuite pour $a = 1$ et le comble est que parfois les résultats sont incohérents. La diagonalisabilité d'une matrice 3×3 dépendant d'un paramètre pose trop souvent des difficultés insurmontables et diagonaliser correctement M_1 est loin d'être acquis pour tous, certains cherchent même à résoudre $M_1P = PD$, système de 9 équations à 9 inconnues.

Des énoncés ou écritures absurdes : avec les notations de l'énoncé, voici quelques perles malheureusement trop fréquentes.

$\det({}^tXSX) = \det({}^tX) \det S \det X$.

Si Q est un polynôme et $S = {}^tPDP$, alors $Q(S) = Q({}^tP)Q(S)Q(P)$.

Les valeurs propres de la somme de deux matrices sont les sommes des valeurs propres de ces matrices.

Si $S = (s_{ij})$, alors $\sqrt{S} = (\sqrt{s_{ij}})$.

$Q(S) = \sqrt{S}$, donc $Q(S)$ est positive car c'est une racine carrée.

Remarques plus précises concernant chacune des questions du problème

Partie I

I.1 – Question rarement bien traitée. Peu de candidats utilisent la technique du pivot de Gauss. Un nombre important de candidats ne sait pas déduire la dimension du sous-espace propre à l'aide du théorème du rang et la recalcule en explicitant ce sous-espace propre.

I.2 – On est surpris du nombre de candidats qui ne calculent pas simplement M_aV, mais cherchent plus ou moins à résoudre $M_aV = \lambda V$. Si l'on a trouvé que 1 était valeur propre, on en conclut que le spectre est formé de 1 et $1+3a$ souvent sans justification et on ne s'intéresse que très rarement au cas où ces deux valeurs propres n'en font qu'une.

I.3.a – Dans l'ensemble, le cours sur cette question est bien connu.

I.3.b – Comme en I.2, très peu de candidats ont pensé à examiner le cas où les valeurs propres 1 et $1 + 3a$ étaient confondues, le total des points a rarement été attribué sur cette question.

I.4.a – Bien traitée en général, mais peu de candidats achèvent le calcul d'une racine carrée de M_1.

I.4.b – Cette question a rarement été abordée avec succès et a révélé un manque de rigueur extraordinaire aussi bien dans la résolution du système $A^2 = m$ que pour faire le lien entre les racines carrées de m et celles de M_1.

I.5 – Le calcul de N^2 n'a pas toujours été correct et plus grave, quelques candidats déterminent M_0^2 au lieu d'une racine carrée de M_0.

I.6.a – Trop d'erreurs de calcul.

I.6.b – Question peu abordée et beaucoup de candidats ne maitrisent toujours pas la définition d'une matrice d'un endomorphisme dans une base donnée en écrivant que $u(e'_1) = e_1$ au lieu de $u(e'_1) = e'_1$.

I.6.c – Toujours des erreurs de calcul dans la recherche du commutant et le lien avec une éventuelle racine carrée de U n'est pas souvent compris.

I.6.d – Résultat trop souvent donné sans preuve.

Partie II

II.1.a – Correctement traité sauf dans quelques copies de candidats qui ne connaissent pas leur cours.

II.1.b – Justifications trop souvent imprécises.

II.2.a – Bien traitée.

II.2.b – Cette question a été rarement réussie et montre une méconnaissance du cours.

II.3 – Trop de candidats ne voient pas le lien avec la question précédente et tentent sans succès de démontrer le résultat directement.

II.4.a,b – Grosses fautes de compréhension et de raisonnement : un vecteur propre est souvent considéré comme un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^n$.

II.5.a – Bien traitée avec ou sans référence aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

II.5.b,c,d – Ces questions n'ont été réussies que dans les copies de qualité et ont souvent donné lieu à des rédactions absurdes ou aberrantes.

II.5.e – Question facile, mais trop rarement abordée.

II.6.a – On oublie souvent de justifier que S^2 est symétrique.

II.6.b – Lorsque la question est abordée, elle est en général bien traitée.

II.6.c – Certains candidats très faibles ont compris que $|S_1|$ désignait le déterminant et d'autres ont simplement pris la valeur absolue de chaque coefficient.

Partie III

III.1 – Question bien traitée, sauf par ceux qui ne savent toujours pas rédiger correctement un raisonnement par récurrence.

III.2.a,b,c,d – Ces questions faciles ont souvent été abordées, bien résolues et ont permis à beaucoup de candidats de grapiller des points.

III.3 – Erreur trop souvent rencontrée dans cette question : la suite (a_n^2) converge, donc la suite (a_n) converge.

III.4.a,b,c et III.5 – Ces questions faciles ont été bien traitées par les candidats qui sont arrivés jusque là.

III.6.a – Question bien traitée lorsqu'elle est abordée.

III.6.b – Les solutions proposées dans cette question sont souvent incorrectes ou incomplètes à cause d'une hypothèse de récurrence mal posée.

III.6.c – Question très peu abordée, mais curieusement les quelques candidats qui l'ont traitée correctement n'on fait aucune allusion à l'erreur qui s'était glissée dans l'énoncé indiquant que les deux suites (D_k) et (Δ_k) avaient une limite commune, alors que les deux limites étaient bien distinctes.

III.7.a,b – Cette dernière question a été très rarement traitée.