EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 3 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve consiste en trois exercices (équations différentielles et analyse, fonctions de deux variables, algèbre linéaire). Il n'était pas attendu des candidats qu'ils traitent l'intégralité des trois exercices, mais plutôt deux ; certains candidats ont néanmoins su montrer leur qualités sur les trois exercices.

- Le premier exercice étudie l'équation différentielle du premier ordre $xy' + \alpha y = F(x)$, F développable en série entière, dans divers cas, selon la valeur de F ou le domaine d'intégration.
- Le deuxième exercice étudie les extrema locaux d'une fonction polynomiale à deux variables ($f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$) sur un ouvert (où elle n'en à pas) puis sur un fermé (où elle en a forcément).
- Le troisième exercice est un exercice d'algèbre linéaire. On étudie les solutions d'une équation définie par la nullité d'un certain déterminant : $\det(M + xJ_n) = 0$ où J_n est la matrice (n, n) dont tous les coefficients sont égaux à $1/n$. On étudie plusieurs cas particuliers, puis on résoud le cas général de deux façons différentes. On est donc amené à étudier l'éventualité de diverses valeurs propre pour certaines matrices.

COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE ET ANALYSE GENERALE

L'épreuve de mathématiques B était formée de trois exercices indépendants sur des sujets très divers. Les trois exercices présentaient des questions de calcul élémentaire et de vérification des connaissances de théorèmes du programme, et se terminaient par des questions plus difficiles, soit par la technique demandée, soit par la conclusion qui exigeait la compréhension maitrisée du reste de l'exercice. Il n'était pas attendu des candidats qu'ils traitent les trois exercices, mais plutôt deux. La correction montre que les candidats se sont répartis assez uniformément entre les divers choix possibles (deux exercices parmi les trois, sans qu'on puisse remarquer un exercice plus ignoré que les deux autres, ou une incursion dans chacun des trois exercices). Les exercices ayant été très découpés, c'est finalement la compréhension globale des exercices qui a le plus différencié les copies, certaines enchaînant des raisonnements se contredisant les uns les autres, alors que dans une partie non négligeable des copies, les candidats montraient par leur rédaction qu'ils comprenaient l'articulation de l'exercice et réussissaient à conclure de manière intelligente.
Dans la plupart des copies, il y a un visible effort de soin apporté à l'écriture et à la présentation, très apprécié par les correcteurs. 2644 candidats ont participé à cette épreuve. La moyenne finale est de 10,35 et l'écart-type est de 4,42.

ANALYSE DES RESULTATS PAR EXERCICES

- Dans le 1 du premier exercice, certains candidats semblent avoir été déroutés par l'indication. Bien sûr, une indication n'est jamais obligatoire et les correcteurs ont accepté de la même façon toutes les argumentations justes. Néanmoins, la dérivation de $x \to |x|$ sur un intervalle ne contenant pas 0 pose problème à de nombreux candidats. Les deux questions suivantes ont eu peu de succès. Très peu de candidats peuvent citer le théorème de Cauchy-Lipchitz, à peine plus peuvent l'appliquer à bon escient. Les calculs de la question 5a sont en général faits, souvent sans justification, puis souvent refaits dans la question 5b, alors qu'il s'agissait d'un banal raisonnement analyse-synthèse. En conséquence, de nombreux candidats ont pensé avoir démontré dans cette question un résultat d'unicité (qu'ils avaient déjà obtenu en 4) et non d'existence. Dans la question 6a, beaucoup de candidats ont cru qu'ils devaient étudier la convergence de l'intégrale en + ∞! La question 6b ne s'est pas avérée difficile, mais parfois non justifiée. La question 6c, plus technique, est ignorée ou maltraitée (on prend un équivalent sans aucune justification).

- Pour le deuxième exercice, qui démarrait très doucement, la principale difficulté pour les candidats a consisté à énoncer une conclusion correcte sur la nature de chaque point critique de la fonction lorsqu'on avait un développement limité à l'ordre 2 en ce point. Une partie non négligeable des candidats a cru trouver des extrema locaux dans la question 1 et donc n'a pas compris le but des questions 2a et 2b. Les calculs 2c et 2d sont rarement menés à terme et le jury a apprécié quand cela était fait : ce sont des calculs élémentaires (un tableau de variation).
- Le début du troisième exercice est classique, très facile et très détaillé. Lorsqu'on arrive à la question 4 où l'on doit démontrer qu'une certaine matrice est diagonalisable, on dispose déjà de plusieurs arguments et on a l'embarras du choix sur le théorème de cours à utiliser. Ces quatre questions ont été très souvent correctement traitées (avec un bémol sur l'énoncé du théorème du rang, qui prend parfois des allures fantaisistes). La question 5 est plus difficile, non pas par la technique, mais parce qu'il suppose d'articuler les questions entre elles et de comprendre le but recherché. La question 6 très technique n'a été traitée que par un nombre infime de candidats.

CONSEIL AUX FUTURS CANDIDATS

- Rappelons la règle élémentaire : Ne pas diviser par 0. Il est donc raisonnable de s'interroger lorsqu'on divise par un paramètre ou lorsqu'on souhaite appliquer la règle de D'Alembert à une série dont on ne connait pas les termes généraux de façon explicite.
- Lorsqu'une question demande explicitement l'énoncé d'un théorème, celui-ci doit être énoncé. Le correcteur ne se contente pas de vérifier qu'il est su dans son application. Réciproquement, le fait de l'avoir cité, ne dispense pas de la vérification des hypothèses nécessaires à son application. Attention à la confusion qui peut se produire lorsqu'on utilise les notations du problème pour énoncer le théorème : son énoncé peut alors ressembler à une affirmation non justifiée.
- Plus généralement, une bonne façon d'appliquer correctement un théorème, surtout s'il est subtil, est d'abord de l'énoncer, puis d'en vérifier les hypothèses. Cela évite de vérifier des hypothèses inutiles, voire d'inventer sans vergogne un théorème ad-hoc qui résout la question.
- Nous conseillons aux futurs candidats de résoudre posément les exercices et de s'interroger sur le sens global et la vraisemblance de l'exercice. Si on obtient dans une question un résultat qui contredit un résultat déjà obtenu, il faut peut-être se demander lequel des deux (au moins) est faux. Il est vrai que les épreuves de concours, de par leur forme, encouragent à la rapidité, mais celle-ci peut devenir contre-productive.
- De même, prendre le temps de faire un calcul sans difficultés mais qui demande quelques lignes peut s'avérer payant.