EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 1

par **Alain CHAURÉ, Maitre de Conférences**
à l'Université de Reims

Remarques générales sur l'épreuve

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques 1 de la session 2006 est articulé en trois parties autour de la notion de projection orthogonale dans un espace euclidien : la première vise à donner une caractérisation de la composée de deux projections orthogonales qui commutent, la seconde propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de pseudo-solution et la troisième généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de pseudo-inverse.

Sur l'ensemble du sujet, seuls les candidats capables d'aligner avec rigueur et rapidité de nombreux raisonnements d'algèbre linéaire et bilinéaire ont pu aller au-delà de la moyenne. La première partie a focalisé l'attention de tous les candidats et a nécessité trop de temps pour une grande majorité sans pour autant que les points soient intégralement acquis. De ce fait les parties II et III ont été trop rarement abordées. Beaucoup de candidats moyens ne se sont valorisés que sur les questions ne nécessitant que des calculs ou raisonnements directs. Les plus faibles n'ont évidemment réussi ni les parties théoriques, ni les calculs. Un trop grand nombre de copies ont révélé un manque de compréhension et de logique dans un certain nombre de questions ; voici quelques exemples de fautes couramment rencontrées :

— Si $E = H \oplus H^{\perp}$, alors $(x \notin H) \Longrightarrow (x \in H^{\perp})$.

— Si p est un projecteur, $\operatorname{Ker} p = \{x \mid p(x) = 0\}$ et $\operatorname{Im} p = \{x \mid p(x) \neq 0\}$.

— Confusion entre endomorphisme orthogonal et endomorphisme symétrique, entre projecteur orthogonal et endomorphisme orthogonal.

— Si M est symétrique, M est la matrice d'un projecteur orthogonal.

— Confusion entre solution et pseudo-solution.

— Une matrice symétrique est la matrice d'un endomorphisme symétrique.

Remarques plus précises concernant chacune des questions du problème

Partie I

I.1 – Certains candidats n'ont pas compris la question et démontrent que $(X, Y) \longrightarrow {}^tXY$ est un produit scalaire. D'autres semblent ne connaître que le produit scalaire canonique.

I.2.a – La formule de projection est en général connue.

I.2.b – Trop de candidats oublient que la base $\mathcal{C}$ est quelconque et considèrent (souvent sans le dire) qu'il s'agit d'une base obtenue par complétion de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. On rencontre souvent l'égalité $M(p)Z = p(z)$! Enfin beaucoup d'arguments fantaisistes sont invoqués pour « simplifier »par Z : Z est non nul, on multiplie par Z^{-1} ou par ${}^tZ$, car $Z^tZ = ||Z||^2$!

I.2.c – Beaucoup de candidats oublient les carrés dans le théorème de Pythagore.

I.3.a – Le lien entre projecteur orthogonal et projecteur symétrique rappelé dans l'énoncé n'est pas toujours compris. Beaucoup oublient de vérifier que $M^2 = M$. Le résultat qu'un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique est ignoré de

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

la quasi-totalité des candidats. Certains ont affirmé que les vecteurs colonnes de M formaient une famille orthonormale de $\mathbb{R}^4$ et qu'en conséquence M était la matrice d'un projecteur orthogonal.

I.3.b – On reste étonné du nombre de candidats qui ne maitrisent pas ce type de question.

I.4.a – La condition $\lambda \neq 0$ n'est pas souvent mentionnée au moment où elle doit être utilisée.

I.4.b – Trop fréquemment p est considéré comme un endomorphisme orthogonal : donc il conserve le produit scalaire et la norme, ensuite le carré sur λ disparait mystérieusement pour fournir le résultat de l'énoncé.

I.4.c – Beaucoup trop de candidats pensent que $a = bc$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$ implique $c \geq 0$.

I.5.a – Pour beaucoup, la symétrie est stable par composition. On trouve aussi comme réponse : $p \circ r$ est symétrique si et seulement si $p \circ r = r \circ p$!

I.5.b – Cette question a souvent dérouté les candidats, car beaucoup ont essayé d'utiliser la question 4 et trop peu savent que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur d'un projecteur.

I.5.c – L'inclusion $\operatorname{Ker}(p \circ r) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$ est rarement prouvée. On trouve souvent le raisonnement faux suivant :

$$(p \circ r)(x) = 0 \Longrightarrow r(x) = 0 \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} r$$

Comme p et r commutent, on a aussi $x \in \operatorname{Ker} p$, et finalement $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$.

L'égalité sur les images est mieux traitée.

I.6.a – Question facile en général bien traitée, mais avec quelques erreurs ou tricheries dans l'expression de ${}^tR$.

I.6.b – Solution très rarement complète. L'implication i) donne ii) est absente ou incorrecte. On trouve souvent l'égalité ${}^tCC = ||C||^2$ totalement dépourvue de sens.

Partie II

II.1 – Question réussie par ceux qui connaissent leur cours et beaucoup de fantaisie pour les autres.

II.2 – Beaucoup de candidats n'ont pas compris la définition de pseudo-solution en considérant tout simplement qu'il s'agit d'une solution de l'équation $f(x) = v$ qui n'existe pas toujours.

On trouve souvent l'équivalence entre f injective et f bijective, alors que les dimensions de E et F ne sont pas nécessairement égales.

II.3 – Cette question révèle à nouveau les candidats n'ayant pas compris le sens de pseudo-solution et qui considèrent que si x_0 est pseudo-solution, alors $f(x_0) = v$.

II.4. – On trouve très fréquemment la faute grossière $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$ si et seulement si ${}^tA(AX_0 - V) = 0$ en invoquant la question **I.1**.

II.5. – Trop d'erreurs dans le calcul du produit ${}^tAA$. Peu de candidats remarquent que les pseudo-solutions forment une droite affine. Certains ont même calculé l'inverse de A ! **II.6** – L'application sur la distance des moindres carrés a été en général correctement traitée par les candidats qui l'ont abordée.

Partie III

III.1.a,b – Il était indispensable pour résoudre cette question d'utiliser les deux décompositions $E = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $F = \operatorname{Im} f \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp$. Les candidats qui ont voulu s'en passer ou n'en considérer qu'une seule ont toujours proposé des solutions fausses, voir hautement fantaisistes, comme celle faisant appel à la résolution de l'équation différentielle $y' = y - f(x)$.

III.1.c – Solution rarement correcte : la plupart du temps, il n'est pas fait appel à l'unicité établie à la question précédente et beaucoup se contentent de dire que puisque f est linéaire, g l'est aussi.

III.2 – Des tricheries fréquentes dans les équivalences, une inclusion devient vite une égalité.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

III.3.a,b – Réponses très souvent confuses, incomplètes et fallacieuses. Il est parfois difficile de savoir ce que le candidat cherche à prouver.

III.4 – Cet exemple n'a été que très rarement traité par les candidats qui avaient parfaitement assimilé la notion de pseudo-inverse introduite par les questions précédentes.

III.5.a – Cette question très proche du cours a été bien traitée par les candidats qui l'ont abordée.

III.5.b – Lorsque la question est abordée, le cas $\lambda = 0$ est bien traité, mais pour le cas $\lambda \neq 0$, le lien avec la question précédente est rarement compris.

III.5.c – Très rarement étudié et encore plus rarement correct.

III.6 – Cette dernière question n'a jamais été traitée jusqu'à son terme.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr