

# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES A

Durée : 4 heures

## PRESENTATION DU SUJET

Le but du problème est d'étudier l'application  $\varphi$  qui à  $f$  de  $C(I)$  associe la solution de  $y' + cy = f$  où  $y(0) = 0$ , en considérant sa continuité éventuelle sur différents sous-espaces-vectoriels normés de  $C(I)$  ( $I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $0$ ).

## COMMENTAIRE GENERAL DE L'ÉPREUVE

Le problème fait appel à de nombreuses connaissances du cours d'analyse.

Il se veut progressif. Les premières parties sont très détaillées, ainsi que les premières questions des différentes parties suivantes. Ce problème a été traité par 3259 candidats. Les notes sont établies de 0 à 20 avec une moyenne de 9,51 et un écart type de 3,63.

## ANALYSE GÉNÉRALE

Les cinq premières parties ont souvent été abordées, la dernière un peu moins. Le jury a apprécié un effort de soins dans la présentation, l'écriture et la mise en valeur des résultats ; les candidats ont souvent un assez bon niveau de connaissances mais manquent de rigueur de mise en forme.

## ANALYSE DES RÉSULTATS PAR PARTIES

Au **I**, les élèves ne reconnaissent pas explicitement le type linéaire de l'équation différentielle et en conséquence ne justifient pas toujours l'utilisation du théorème de Cauchy – Lipschitz linéaire et n'en rappellent pas les hypothèses. Ceux qui résolvent l'équation oublient souvent de montrer l'unicité de la solution avec la condition initiale.

Le **II** a apporté le plus de surprises : pour une partie des élèves  $C(I)$  est de dimension finie et toutes les normes  $y$  sont équivalentes. Pour les autres la comparaison des normes  $L_1$ , quadratique et uniforme est néanmoins bien étudiée au 1).

Les majorations aux questions suivantes sont souvent imparfaites : oubli des modules, oubli que  $a < 0$ .

Au **III** le cas où  $\lambda = c$  est oublié dans une copie sur deux, c'est-à-dire que l'on s'autorise à diviser par 0. La justification de l'intégrabilité de  $f_\lambda$  et de  $\varphi(f_\lambda)$  n'est pas maîtrisée dans une copie sur deux. Le calcul des normes  $\| \varphi \|_{III_1}$  et  $\| \varphi \|_{III_2}$  est rarement étudié.

Au **IV** le 1) utilise les propriétés du cours sur les séries entières, la réponse à la question est souvent incomplète. Par contre le 2) est souvent traité correctement.

Au **V** peu de candidats établissent complètement que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $H(I)$ , en particulier que  $\Phi(f,g)$  a un sens ou que  $\Phi$  est définie.

Dans la suite, la notion d'endomorphisme entre espaces-vectoriels n'est pas bien comprise dans l'importance à accorder aux ensembles de départ et d'arrivée.

Le **VI** 1) a été peu abordé, par contre le calcul des  $d_k(f)$  et l'utilisation du théorème de Parseval l'est souvent.

## **CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS**

Nous conseillons aux futurs candidats de bien connaître les théorèmes-clés du programme ; quand un théorème est évoqué, il doit être énoncé et nécessite de vérifier toutes les hypothèses nécessaires à son application. Probablement les futurs sujets imposeront de manière plus explicite cette vérification. De manière générale les candidats doivent être plus rigoureux dans la mise en forme des raisonnements.