

## Thème

Ce sujet proposait de donner un sens à des fonctions de matrices autres que polynomiales. Il offrait un autre regard sur l'aspect technique du calcul matriciel. Il faisait appel à la fois à des notions d'algèbre et d'analyse et couvrait une grande partie du programme de l'année.

## Observations générales

Le problème, bien construit était intéressant et de longueur raisonnable. Il se composait de 5 parties relativement liées mais les questions pouvaient pratiquement être toutes traitées indépendamment les unes des autres. On définissait une notion nouvelle et les candidats n'ont pas toujours su prendre du recul par rapport à l'ensemble du problème.

Globalement, les copies ont été agréables à corriger et le sujet a bien trié les candidats. Une poignée de candidats a traité le sujet en entier et on rencontre quelques copies excellentes.

On conseille aux étudiants de lire les conseils du rapport de l'épreuve de mathématiques 1 qui restent valables.

## Erreurs courantes

1. Confusion entre implication et équivalence. Le candidat doit réfléchir à ce qui est demandé avant de choisir d'utiliser l'une ou l'autre.
2. Peu d'aisance dans le calcul matriciel en dimension 2 ou 3.
3. Mauvaise définition d'une norme.
4. Mauvaise définition d'une algèbre et d'un morphisme d'algèbres.
5. Candidats peu performants pour discuter de la diagonalisabilité d'une matrice.
6. Absence des valeurs absolues dans les majorations en particulier avec les max.
7. Confusion entre polynôme minimal et polynôme caractéristique.
8. Confusion entre  $f \cdot g$  et  $f \circ g$ .
9. Confusion entre matrice identité et matrice dont tous les coefficients valent 1 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + I_2 \neq \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{pmatrix} !$$

## Remarques détaillées par question

1. Le produit matriciel n'est pas toujours maîtrisé, on voit parfois que  $MX$  est une matrice carrée ! Mauvaise manipulation des sup et max.
2. Curieusement les candidats ont du mal à prouver qu'une application est une norme : soit ils oublient de vérifier tous les axiomes, soit ils vérifient une inégalité sur les produits à la place de l'inégalité triangulaire.  
Une réponse peut être courte en particulier si on demande de « justifier que... » : on pouvait tout à fait citer le théorème au programme indiquant qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Lorsque l'on parle de limite d'une suite dans un espace vectoriel normé il convient d'indiquer pour quelle norme.

3. La formule de Taylor avec reste intégral ne semble pas être connue de tous les candidats. Il était important de préciser de quelle formule de Taylor il s'agissait, la réponse « formule de Taylor » étant incomplète. Ici encore il était inutile de redémontrer la formule qui est au programme.  
Peu ont ensuite trouvé le bon changement de variables et le caractère  $C^\infty$  de la fonction  $h$  est rarement bien justifié.
4. La formule de Leibniz n'est pas assez souvent utilisée et souvent mal connue : on oublie les coefficients binomiaux ou encore on démarre par  $k = 1$ .
5. Une erreur très fréquente : «  $f - g = h \pi$  avec  $f, g$  et  $\pi$  polynômes donc  $h$  est encore un polynôme » !
6. Il convient d'abord d'indiquer qu'une application est linéaire (ou un morphisme) avant de s'intéresser à son noyau. Une application linéaire injective en dimension finie n'est pas toujours bijective ! Ne pas oublier de préciser que  $\dim E = \dim F$ .
7. Certains candidats n'ont pas vu le lien avec la question qui précède !
8. On demandait d'utiliser une division euclidienne. Il était rarement précisé de quelle division il s'agissait.
9. Pour trop de candidats, le polynôme minimal est le polynôme caractéristique ! On rappelle par ailleurs que le polynôme minimal est unitaire.  
On confond polynômes et séries entières puis on essaye d'utiliser le développement en série entière de la fonction sinus ce qui d'ailleurs n'est pas dans l'esprit du sujet.
10. Beaucoup de candidats ont voulu ici reconnaître à tort les polynômes d'interpolation de Lagrange.
11. Pas de problème pour l'égalité mais plus de difficultés pour l'indépendance.
12. Question assez bien réussie.
13. Trop de perte de temps et trop d'erreurs pour savoir si une matrice est ou pas diagonalisable !!!
14. L'unicité n'est pas toujours évoquée.
15. On oublie parfois  $S(f \cdot g) = S(f)S(g)$ .
16. à 23 Questions assez peu traitées.

La moyenne de l'épreuve est de **8,23** et l'écart type est de **3,56**.