MATHEMATIQUES II - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

L'épreuve proposée était constituée de deux parties relativement indépendantes et de longueurs inégales.

Dans la première partie (6 questions), il s'agissait d'étudier la structure algébrique de l'espace vectoriel (**C**, +, .) constitué du produit cartésien **C** de l'espace vectoriel **M** des matrices réelles carrées d'ordre 3, muni d'une seconde loi de composition interne appelée produit et notée *.

On demandait de démontrer ensuite que le sous-ensemble **G** des éléments (P, Q) de l'ensemble **C** tels que P soit une matrice orthogonale directe et tels que ${}^tPQ + {}^tQP = 0$, muni de cette loi produit est un groupe. On étudiait ensuite deux sous-ensembles **H** et **A** de **G**. Cette première partie nécessitait une bonne connaissance des structures algébriques (groupes, sous-groupes, algèbre, morphisme de groupes, etc.) qui a malheureusement fait défaut à de nombreux candidats qui ont ainsi révélé de graves lacunes dans ce domaine.

La seconde partie, plus longue (15 questions) avait pour but de montrer qu'il existe un isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace **E** de la géométrie affine euclidienne orientée et le groupe (**G**, *) de la première partie. On demandait dans sa partie préliminaire, proche du cours, d'écrire la matrice d'une application linéaire définie par un produit vectoriel dans une base donnée, d'étudier l'action d'une rotation sur un produit vectoriel et de résoudre le problème classique de la division vectorielle. La question 15, dans laquelle on associait à un déplacement **d** un couple (α, β) d'endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{E_3}$ était essentielle pour traiter la fin du problème et a permis de sélectionner les candidats. Il est regrettable que les exemples proposés (questions 13, 18 et 21) soient rarement traités et encore moins avec succès.

Certains candidats ont concentré tous leurs efforts sur la partie I et n'ont pu disposer d'un temps suffisant pour aborder la partie II. A contrario, d'autres candidats ont fait l'impasse sur la partie I. Les questions ouvertes (1, 5, 7, 8, 14 et 15) et même les questions proches du cours ont permis de faire la différence entre les candidats.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

1. Cette question ouverte a été sélective. Il a été donné pour la dimension de l'espace vectoriel **C** une grande variété de résultats plus ou moins fantaisistes, la plupart du temps non justifiés. Les principales valeurs rencontrées ont été : 1, 2, 6, 9, 12, 18, 36 et 81, cette dernière valeur étant la plus fréquente et 18, la valeur attendue. Une démonstration correcte du résultat a été donnée dans de rares copies.

2. De nombreux candidats ne savent pas ce qu'il convient de démontrer. Certains redémontrent l'associativité de l'addition dans **C**, d'autres n'arrivent pas à déterminer l'élément unité de l'algèbre **C,** ce qui les pénalise pour les questions suivantes. D'autres essayent de prouver que (**C**, *) est un groupe, certains affirmant même que la loi * est commutative. Des confusions sur le vocabulaire utilisé ont été fréquentes, par exemple entre « associativité » et « distributivité ».

3. Dans certaines copies, on veut prouver que **G** est un sous-groupe de (**C**, *)**.**
Cette question n'est que partiellement correctement traitée dans la plupart des copies : certains candidats se contentent de démontrer que la loi produit * est interne, d'autres que tout élément admet un inverse à droite ou à gauche sans vérifier que cet inverse appartient à **G**.

4. De nombreux candidats pensent que toute partie stable d'un groupe est un sous-groupe et certains redémontrent même l'associativité de la loi interne. La définition d'un morphisme de groupes est rarement explicitée. D'autres candidats, confondant les structures de sous-groupes et de sous-espaces vectoriels, parlent de dimension d'un groupe et utilisent le théorème du rang pour démontrer l'isomorphisme !

5. Curieusement, de nombreux candidats répondent à cette question ouverte par la négative, même parmi ceux qui semblaient avoir compris la notion de sous-groupe.

6. Cette question a été traitée par la majorité des candidats car elle ne dépendait pas des résultats des questions précédentes. Il était nettement préférable de démontrer l'équivalence à l'aide de deux implications. Une erreur fréquemment rencontrée a été la suivante : toute matrice carrée d'ordre 3 dont le déterminant est égal à 1 est une matrice orthogonale directe.

Partie II

7. Dans les copies faibles, le produit vectoriel est parfois calculé correctement mais les candidats sont incapables d'en déduire la matrice demandée. D'autres candidats donnent la matrice exacte sans aucune justification.

8. La plupart des candidats connaissent le résultat et font la démonstration à partir de la matrice de la rotation r, d'axe k et d'angle θ dans une base orthonormée directe et développent des calculs plus ou moins bien détaillés et soignés. On trouve aussi dans certaines copies des résultats surprenants.

9. Bien traitée en général lorsque la question 8 l'est également.

10. Correctement traitée ; notons que certains candidats éprouvent le besoin de faire un dessin pour illustrer leur démonstration.

11. Question sélective sur le problème pourtant classique de la division vectorielle. La formule du double produit vectoriel est utilisée avec plus ou moins de réussite, mais le plus souvent, seul un résultat partiel est obtenu, l'analyse et la synthèse du problème n'étant pas séparées. La résolution du système linéaire obtenu avec les composantes des vecteurs n'est pratiquement jamais effectuée.

12. Question très mal abordée par la plupart des candidats.

13. Certains confondent encore équations d'une droite de l'espace avec équation d'un plan.

14. Très peu de candidats ont donné la condition nécessaire et suffisante demandée et nombreux sont ceux qui écrivent n'importe quoi !

15. Cette question importante pour la suite du problème a été sélective et bien notée. Rare sont les candidats qui ont trouvé l'endomorphisme ß.

16 et 17. Rarement abordées.

18. Certains candidats se contentent de faire un dessin sans commentaire ni démonstration.

19, 20 et 21. Très rarement abordées et encore moins souvent résolues par les candidats qui ont sans doute manqué de temps.

III) CONCLUSION

Les candidats doivent énoncer correctement les définitions et les théorèmes utilisés, faire preuve de rigueur dans les démonstrations et ne pas se contenter d'affirmations gratuites ou d'illustrations par des dessins en géométrie.

Rappelons encore pour quelques candidats qu'une orthographe correcte et une présentation soignée sont appréciées à leur juste valeur par les correcteurs. De plus, il est souhaitable d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus. Soulignons aussi qu'il est inutile de recopier l'énoncé d'une question que l'on ne traite pas.

En conclusion, cette épreuve a mis en évidence la non assimilation de la partie algèbre du programme pour la plupart des candidats et a permis une bonne dispersion des notes avec toutefois peu de notes très basses en raison de la présence de questions simples, proches du cours.