- MATHEMATIQUES I - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème de cette année était une épreuve d'analyse portant sur une large partie du programme, en particulier, convergence uniforme, intégrales généralisées, dérivation sous $\int$.

La moyenne générale, proche de 8/20, se maintient par rapport aux années précédentes, avec des notes s'étalant de 0,5 à 20, la proportion de copies très faibles restant stable. Mais on regrette une diminution sensible de très bons candidats, obtenant une note ≥ 16, alors que l'épreuve ne comportait que des difficultés classiques et que la résolution convenable de la seule 1ère partie suffisait à obtenir une bonne note.

Les copies les plus faibles dénotent des lacunes aussi bien dans l'assimilation des connaissances de première année (limites, symboles $\sim$ et o) que dans celles de seconde année (convergence uniforme, dérivation sous $\int$).

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

1) Quelques candidats ne justifient pas correctement les inégalités demandées et affirment des erreurs du type :

« Une fonction convexe est croissante »

Rappelons qu'une rédaction valable doit indiquer l'utilité des hypothèses les plus importantes et en particulier ici pourquoi on devait opposer $0 < x < 1$; il fallait préciser les valeurs de x_1, x_2, x_3.

2) Les inégalités sont généralement établies ; il y a cependant quelques abus avec l'emploi du symbole x ! qui n'a pas de sens lorsque $x > 0$ n'est pas entier (sauf si on le définit).

3) La relation est le plus souvent trouvée ; il était nécessaire d'utiliser une récurrence sur p, et de ne pas recourir sans explication au symbole « x ! ».

4) Parfois l'une des inégalités n'a pas été trouvée car elle nécessitait de remplacer n par $n+1$. Faute de trouver une méthode appropriée, certains commettent des abus dans les inégalités.

Au terme de ces quatre premières questions, on avait déjà une idée du niveau de la copie, les plus faibles ne les ayant pas traitées complètement.

5) Cette question, pourtant immédiate en admettant le 4), a été beaucoup moins souvent résolue et s'est révélée décevante.

On trouve des abus du type « $x\,(x+1)\ldots(x+n) \sim n\,!$, lorsque $n\to\infty$ » ce qui est manifestement absurde si $x = 1$, par exemple. Enfin dans les justifications, mieux vaut ne pas invoquer le mathématicien « Desgendarmes », dont l'existence reste obscure.

6) Cette question plus délicate n'a été qu'exceptionnellement traitée. On pouvait se ramener au 5) par un changement de variable, mais les calculs se sont révélés trop compliqués ; il y avait pourtant une méthode commode consistant à passer du cas x au cas $x+1$, et raisonner par récurrence.

7) C'est une conséquence des 5) et 6).

8) Si cette question, qui est une application directe du cours, est résolue dans la majorité des cas, on trouve cependant quelques rédactions insuffisantes avec des abus sur les symboles o ou $\sim$.

(On rencontre « $t^{x-1}\,e^{-t} \sim e^{-t},\ t\to+\infty$ »). De tels abus ne peuvent être acceptés et il est souhaitable de rappeler la définition des o, $\sim$.

9) Il convenait de préciser que la fonction à intégrer était continue et >0. (Une fonction ≥ 0 en escalier peut être d'intégrale nulle sans être identiquement nulle).

10) Cette question un peu plus difficile a bien départagé les candidats et rares ont été ceux qui ont fourni une solution entièrement satisfaisante. Certains se trompent dans le calcul de $\frac{\partial k}{\partial x}$, ou ignorent les conditions qui autorisent à dériver l'intégrale T.

Lorsque les conditions théoriques sont connues, la justification est le plus souvent insuffisante faute d'une majoration adéquate de $|k|$, et $\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right|$ par une fonction intégrable sur IR_{+}^{*} et ne dépendant par de *x*, et il y a des oublis de la valeur absolue dans $\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right|$. Il était en effet nécessaire de supposer $a \leq x \leq b$ avec $a > 0$, et distinguer les cas $0 < t \leq 1$ et $t \geq 1$. Enfin l'intégrabilité de la fonction majorante est rarement justifiée. (Rappelons que les intégrales dites de « Bertrand » ne sont pas supposées connues).

11) Si la relation entre *T(x+1)* et *T(x)* est généralement trouvée, la convexité de *lnT(x)* l'est plus rarement ; certains se contentant de la convexité de *T(x)*, ce qui n'est pas suffisant (*ln x* n'est pas convexe !). L'étude du signe de la dérivée seconde de *ln T(x)* au moyen de l'inégalité de Shwarz n'a été que rarement faite.

12) C'est une application des 7) et 11).

13) Les dernières questions de cette partie ont été moins souvent abordées, mais le temps pouvait commencer à manquer.

L'expression : $v_n^{'}(x) = \ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+x}$ n'est pas toujours trouvée, et lorsqu'on dispose de cette valeur, on effectue parfois un développement limité insuffisant comportant un terme en $0(\frac{1}{n})$ dont la série ne peut être étudiée ; enfin, il y a des abus concernant l'addition des ~, qui n'est pas valable en général et doit être justifiée.

La convergence uniforme a été encore plus rarement étudiée. Il fallait majorer $|v_n^{'}(x)|$ par une expression indépendante de *x* pour $a \leq x \leq b$, $a > 0$ pour obtenir la convergence normale ; or, beaucoup omettent de préciser le signe de $v_n^{'}$, et il ne sert à rien de majorer $\left|\sum_{k=1}^{n} v_k^{'}(x)\right|$; parfois le domaine de variation de *x* n'est pas précisé dans l'interprétation de la convergence uniforme ou normale.

14) et 15) Le théorème de dérivation des séries de fonctions n'est pas toujours connu (c'est sur la série des dérivées que doit porter la convergence uniforme) et les valeurs des dérivées $\frac{T'(x)}{T(x)}$, T'(1) sont rarement obtenues.

Partie II

16) Cette question facile a été généralement résolue ; certains oublient de préciser que $w_n \to 0, n \to \infty$, ou de dire pourquoi s > 0.

17) Par contre cette question plus délicate n'a été que rarement traitée. Si le rayon R = 1 de la série entière est en général obtenu, la convergence uniforme sur [0,1] n'est que rarement comprise : la propriété R = 1 ne

suffit pas pour affirmer la convergence uniforme sur [0,1[ni sur [0,1]. Il fallait faire appel à une étude un peu plus délicate de majoration du reste d'une série alternée, indépendamment de x, pour aboutir.

La sommation de $\varphi(x)$ pour $0 \leq x < 1$ est souvent trouvée (malgré quelques erreurs, certains trouvant $\sin x = \varphi(x)$), mais le cas $x=1$ n'est pas compris : il fallait utiliser la continuité à gauche en $x=1$ qui découlait de la convergence uniforme.

18) Question élémentaire servant d'introduction au 19).

19) On retrouve une question de dérivation terme à terme de série de fonctions ; il fallait établir la convergence uniforme de $\sum w_n'(s)$ pour $s \geq a > 0$ par une majoration de reste de série alternée uniforme par rapport à s ≥ a, de manière analogue au 17) ; il n'y a pas de convergence uniforme de $\sum w_n'(s)$ pour $s>0$.

20) Question facile avec un changement de variable.

21) et 22) Rarement abordées, ce qui s'explique vu la longueur du sujet. Il est d'ailleurs inutile d'aborder ce type de question si on ne dispose pas des résultats nécessaires à sa résolution (Valeurs L(1), L'(1), T'(1)), et surtout si les premières questions ne sont pas bien étudiées.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Les considérations qui suivent s'adressent surtout aux candidats les plus faibles et qui auront été déçus d'avoir un résultat insuffisant.

Il convient de ne pas avoir de lacune sur des questions importantes étudiées en première année, plus particulièrement sur les limites et l'interprétation des symboles o, ~ associés aux limites ; il faut aussi être vigilant dans la manipulation des inégalités et des valeurs absolues (en surveillant les signes). Les abus dans ces domaines ne peuvent être excusés.

En ce qui concerne les notions propres au programme de seconde année, il faut connaître très exactement toutes les hypothèses qui permettent l'application des théorèmes fondamentaux d'analyse. Par exemple, pour la dérivation sous $\int$ dans les intégrales généralisées. Il faut de plus être en mesure de justifier ces propriétés sur les exemples proposés ce qui suppose la pratique d'un certain nombre d'exercices typiques de ces questions.

Enfin, certains semblent mal maîtriser la notion de convergence uniforme car ils ne précisent pas le domaine de variation de la variable.

Le respect des principes précédents devrait permettre d'améliorer sensiblement les résultats d'ensemble.