1.2 – Epreuves écrites

1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet de Mathématiques II filière MP proposait cette année un beau voyage dans le monde des nombres premiers.

Après avoir revu l'infinitude de leur ensemble, il s'agissait d'aborder leur répartition dans l'ensemble des entiers naturels. On commençait par établir la divergence de la série de leur inverse, on enchaînait sur une majoration du produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier donné et on terminait par un encadrement de la célèbre fonction arithmétique π sans aller bien-sûr jusqu'au théorème d'Hadamard-De La Vallée Poussin. L'énoncé s'achevait enfin par une petite incartade du coté du système RSA de cryptographie à clef publique.

Pour bien réussir ce problème, nul n'était besoin d'être un arithméticien chevronné puisque de nombreuses indications en parsemaient l'énoncé et que la grande majorité des questions s'averraient n'être que de simples applications des grands théorèmes du cours tant d'Analyse que de Combinatoire ou d'Algèbre Générale.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

1. Beaucoup d'erreurs de raisonnement dans cette question "hyper-bateau" qui, rappelons-le, se traitait il y a quelques années encore, en classe de Terminale scientifique. Bien que la démonstration par l'absurde était largement ébauchée par l'énoncé, il est surprenant de constater qu'un grand nombre de candidats n'arrivent pas à exhiber clairement et rigoureusement la contradiction salvatrice. Il fallait en effet, pour bien aborder cette question, supposer que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étaient les seuls nombres premiers .

2. a. Trivialité lorsque l'on a remarqué qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $1/n^s$. Encore fallait-il rappeler que cette raison se trouvait dans]0,1[.

   b. Si une bonne partie des candidats maîtrisent relativement bien la sommabilité des familles doubles, il en reste encore un trop grand nombre qui n'y comprennent rien et qui pensent par exemple que la convergence des deux séries $\sum_i u_{i,j}$ et $\sum_j u_{i,j}$ est suffisante ! En revanche, si la positivité du terme général de la famille a été souvent omise, la valeur de sa somme a bien été obtenue dans toutes les copies. Attention cependant, il ne s'agit en aucun cas du produit de Cauchy de deux séries.

   c. Deux types d'erreurs de raisonnement ont amené le jury a sanctionner bien des copies dans cette question :
   - Vouloir montrer que le noyau de l'application est réduit à (0,0,…,0) n'a de sens que si l'on travaille dans des groupes avec des morphismes, ce qui n'est pas le cas.
   - Parler de diviseurs et utiliser l'unicité de la décomposition des entiers naturels en facteurs premiers alors que l'on travaille avec des exposants souvent négatifs quand ils ne sont pas carrément non entiers, a laissé les membres de ce jury très perplexe.

   Mieux aurait-il valu, pour éviter des ennuis, élever tout de suite m à la puissance 1/s.
   Pour en finir avec l'ensemble M_n signalons qu'il n'est pas suffisant d'être dénombrable pour pouvoir être indexé dans l'ordre croissant (penser à Q). Par contre, dire que la racine s-ième de M_n est une partie de N le permettait aisément.

   d. L'inégalité demandée provenait de l'inclusion précédente. Une grande confusion sans doute volontaire a cependant régné entre les entiers n et N pour le passage à la limite. Il aurait fallu pour l'éviter remarquer que $n \to +\infty$ ssi $N \to +\infty$.

e. Aucune difficulté si l'on n'oublie pas de préciser que s >1 pour manipuler la somme de la série. Il faut souligner d'ailleurs que certains candidats ont obtenu, par cet encadrement, une expression simple de $\zeta(s)$ alors qu'il n'en existe aucune.

3. Si la plupart des candidats ont compris qu'il fallait utiliser l'encadrement précédent pour obtenir le comportement des sommes partielles de la série des v_i, la mise en pratique a souvent été calamiteuse soit, par une mauvaise manipulation des inégalités à termes négatifs soit, par une mauvaise majoration de l'expression ln(1-x). Cette majoration, même correcte, ne convenait pas. Mieux valait alors lui préférer un équivalent de v_i et ne pas oublier de signaler la constance des signes. Malheureusement, un nombre relativement élevé de copies a proclamé la convergence de la série des $1/p_i$ ainsi que des conclusions qualitatives pour le moins inédites !

4. Cette question très standard créait l'une des rares occasions d'utiliser l'un des grands théorèmes du cours. Hélas, beaucoup ont raté le rendez-vous. Voici quelques erreurs glanées :
   - confusion entre "continûment dérivable" et "continue et dérivable".
   - confusion entre les variables k et s ce qui donnait $s \to -s/k^{s+1}$ comme dérivée de $s \to 1/k^s$.
   - confusion entre "convergence uniforme sur $]1,+\infty[$" et "convergence uniforme sur tout compact de $]1,+\infty[$".
   - méconnaissance des hypothèses précises du théorème de dérivation terme à terme.

Partie II

1. a. Des colonnes ou des lignes sont oubliées dans ce tableau, des valeurs de 4^n sont parfois fausses.

   b. Certains ont oublié qu'un entier premier peut parfois être pair, d'autres que C_{2m+1}^m n'est pas obligatoirement divisible par l'un des entiers figurant dans le produit de facteurs de son numérateur, d'autres encore que le développement du binôme de Newton commence à 0 et pas à 1. Enfin, cette question a été l'occasion pour certains d'étaler au grand jour leur totale ignorance des propriétés de divisibilité dans N. C'est ainsi que l'on a pu lire :
   - Théorème de Gauss : a divise bc et a ne divise pas b $\Rightarrow$ a divise c
   - $n_1, n_2, \ldots, n_p$ divisent n $\Rightarrow \prod n_i$ divise n

2. Peu de réponses complètes à cette question, certains se contentant d'une simple inégalité. Il est fort à parier que, sans la réponse donnée par l'énoncé, quasiment aucune solution proposée n'aurait fourni la bonne expression des α_i.

3. a. De nombreux candidats ont cru devoir commencer par calculer In ; certains, croyant obtenir l'inverse de C_{2m+1}^m, ont cru pouvoir utiliser la majoration du 1. c. , sans même se rendre compte qu'une majoration inversée donne une minoration. D'autres sont parvenus quand même à la majoration demandée par un procédé récurrent quelque peu pénible. Cette question a révélé à quel point un raisonnement simple comme majorer une intégrale en utilisant la borne supérieure d'une fonction est peu naturel chez certains.

   b. Encore bien des erreurs sur le binôme de Newton : oubli des coefficients, des signes alternés … Ne parlons pas des étourdis qui ont démontré l'inégalité inverse sans s'en apercevoir ! Signalons seulement que la conclusion découlait tout simplement du fait qu'un entier strictement positif est au moins égal à 1.

Partie III

1. Question délicate, les discontinuités de H_A n'étant pas forcement en tous les entiers premiers. Il faut noter à ce propos que la notation H_A (x-0) ne semble pas connue de tous ; certains ont réussi à comprendre finalement le sens voulu par l'auteur, d'autres y ont carrément vu une erreur d'énoncé.

2. a. Des raisonnement erronés ont amené des candidats à parler de P_x pour x réel alors que seul P_n pour n entier naturel n'avait à priori de sens.

b. Suivre l'indication et encadrer les fonctions intégrées par leurs extrema était un jeu d'enfant pour obtenir la limite de R. A noter que certains ont cru à tord que la fonction $t \to 1/\ln^2 t$ était intégrable sur $]2,+\infty[$, ce qui permettait évidemment une conclusion rapide.

d. Certains ont affirmé sans scrupules que si une fonction f admet une limite finie en $+\infty$, f(x) se trouve majorée par celle-ci pour x assez grand.

3. Question rarement traitée mais quelques bonnes démonstrations plus ou moins complètes ont été remarquées et rémunérées.

Partie IV

Cette partie était un exercice indépendant du problème que constituaient les trois premières parties ; elle pouvait donc se traiter à part. Certains l'ont bien compris et ont choisi de l'étudier en priorité.

1. a. Question en général bien traitée par le théorème de Bézout, même si certains ont trouvé des valeurs fausses pour $\varphi(n)$.

   b. Erreurs souvent relevées :
   - $(Z/nZ)^*$ est un sous-groupe de Z/nZ.
   - Oubli de l'un des axiomes de groupe.

   Le théorème de Lagrange bien que hors programme a été fréquemment cité pour prouver le théorème d'Euler ; ceci a été sanctionné. Parmi ceux qui ont choisi la voie tracée par l'indication de l'énoncé, beaucoup ont trébuché en pensant que le produit de tous les éléments d'un groupe vaut 1 ; c'est oublier que certains éléments sont leur propre inverse.

   c. On pouvait ici se passer totalement d'Euler pour calculer ce reste.

2. a. Beaucoup d'erreurs dans la résolution de cette question, notamment l'affirmation selon laquelle φ est multiplicative, ou celle qui affirme que $(Z/pZ)^* \times (Z/qZ)^*$ est toujours isomorphe à $(Z/pqZ)^*$. Heureusement, certains ont tout redémontrer avec brio. Mais le plus surprenant a été l'affirmation fréquente selon laquelle a est premier avec pq si et seulement s'il est de la forme bc avec b compris entre 1 et $p - 1$ et c compris entre 1 et $q - 1$.

   c. Si la réponse à cette question est évidente lorsque a est premier avec n, elle ne l'est plus du tout dans le cas contraire. C'est là que l'isomorphisme du 2. a. trouve toute son utilité, ce que pratiquement aucun candidat n'a vu. Les plus perspicaces ont vu la difficulté pour a non premier avec n sans réussir toutefois à la surmonter.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Le jury ne saurait que trop conseiller aux futurs candidats de bien réfléchir sur certains résultats fondamentaux utilisés ou obtenus dans ce problème.

Enfin, il est toujours regrettable de constater que cette année encore, le soin et la rédaction n'ont pas été des priorités chez bon nombre de candidats.