1 - MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 C - MATHEMATIQUES I - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposé porte sur la co-réduction d'une application semi-linéaire définie sur un **C**-espace vectoriel E de dimension finie, à valeurs dans E. Pour cela, les notions de valeur co-propre, vecteur co-propre, co-diagonalisabilité sont définies. Un lien est établi entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de $A\overline{A}$; il est ensuite demandé de montrer une condition nécessaire de co-diagonalisabilité, et pour terminer quelques exemples sont proposés pour illustrer ces notions. La co-réduction est une notion assez ancienne puisque Takagi a montré en 1925, qu'une matrice symétrique complexe est co-diagonalisable.

La résolution de ce problème nécessite une bonne connaissance du cours et des techniques de base d'algèbre linéaire. Aucun candidat n'a traité le problème en entier, par contre toutes les questions ont été abordées avec plus ou moins de succès. Les calculs erronés ont été nombreux, en conséquence les candidats qui ont mené correctement à terme leurs calculs ont été récompensés. Les questions dont le résultat à démontrer est fourni par l'énoncé ont presque toujours reçu une réponse , et certains candidats n'hésitent pas à écrire des phrases incohérentes pour tenter de justifier ce qui leur est demandé.

Nous avons constaté la présence de copies d'une pauvreté affligeante mettant en évidence des lacunes en algèbre linéaire. A l'inverse, les copies rédigées clairement et de manière rigoureuse ont reçu d'excellentes notes.

Le choix du barème a permis d'étaler les notes de 0.5 sur 20 à 20 sur 20 , avec une moyenne proche de 8.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Passons en revue les diverses questions du problème.

2.1- Première partie

La question 1-a a été bien traitée dans la majorité des copies. Signalons l'erreur suivante : des candidats ont écrit que μ est unique car $\mu = \dfrac{u(x)}{x}$!

La question 1-b a été discriminante ; les candidats méticuleux ont trouvé que $\mu\, e^{i\theta}$ est une valeur co – propre associée au vecteur $e^{\frac{-i\theta}{2}}\, x$, ils ont été récompensés.

Le vecteur $e^{-i\theta}\, x$ a assez souvent été proposé comme vecteur co – propre associé à $\mu e^{i\theta}$, ce qui est incorrect.

Toutes les réponses possibles ont été obtenues dans la question 1-c ; certains candidats ont affirmé que E_μ est un espace vectoriel complexe car c'est une partie d'un **C**-espace vectoriel, d'autres pensent que E_μ est un espace vectoriel complexe mais n'est pas un espace vectoriel réel. Les correcteurs se sont montrés indulgents envers les candidats qui ont oublié le cas particulier $\mu = 0$, qui permet de conclure que E_μ est un espace vectoriel complexe.

La question 1-d était très facile, et pourtant quelques candidats ont affirmé que $u \circ v$ n'était pas linéaire.

Dans la question 2-a, il était demandé de montrer la relation Y = $A\overline{X}$; des candidats ont paraphrasé l'énoncé pour conclure péremptoirement que l'on obtient la relation demandée ! Par contre, les candidats qui ont adapté correctement leur cours (fait dans le cas d'une application linéaire) à une application semi-linéaire ont obtenu sans difficulté le résultat demandé ; cela leur a permis d'obtenir : $B = S^{-1}A\overline{S}$; voici quelques réponses obtenues par des candidats : $B = SA$, $B = AS$, $B = SAS^{-1}$, $B = S^{-1}AS$; certains candidats ont même invoqué un théorème classique du cours, sans autre précision, pour affirmer que $B = S^{-1}AS$.

La question 3-a, sélective, a clairement mis en évidence les candidats soigneux et méticuleux qui ont conclu à la non–existence de valeurs co – propres. Beaucoup de candidats n'ayant peut-être pas lu avec suffisamment d'attention l'énoncé ont confondu valeurs propres et co-propres, ce qui a conduit à des résultats faux.

La question 3-b, qui est une simple application du cours, a révélé des surprises ; des candidats n'ont pas vu qu'il existe un vecteur propre réel X associé à λ.

La question 4-a, facile, a été généralement bien traitée.

La première partie de la question 4-b a été abordée par de nombreux candidats, mais peu ont conclu rigoureusement en appliquant la question 1-b. La deuxième partie de cette question a été très peu abordée, il est vrai que cette question était plus difficile, et il n'est pas immédiat de penser à chercher un vecteur co-propre dans l'espace vectoriel engendré par X et $A\overline{X}$.

Quant à la question 4-c, qui est une synthèse des résultats précédents, elle a été traitée correctement par de nombreux candidats, sous réserve d'admettre le résultat précédent .

La question 4-d a été très discriminante ; les calculs faux ont été nombreux. Cette question pouvait être résolue de deux manières ; les deux possibilités ont été trouvées dans les copies :

a) soit en utilisant la question précédente et en recherchant pour quelles valeurs du réel m, la matrice $A_m\overline{A}_m = A_m^2$ a des valeurs propres positives ou nulles, ce qui conduit au polynôme caractéristique de cette matrice :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (m^2 - 2)\lambda + 1$$

Que d'erreurs ont été constatées dans le calcul, élémentaire, du discriminant de ce trinôme ! Voici une liste non exhaustive des conditions trouvées pour m : $|m| \geq 2$, $m > 2$, $|m| \geq 1$, $|m| \geq \sqrt{2}$. Des candidats, en nombre non négligeable , se sont trompés dans le calcul de A_m^2.

b) soit en résolvant : $A_m\begin{pmatrix}\overline{a}\\ \overline{b}\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ où $\mu \geq 0$; ici aussi, les erreurs de calcul furent nombreuses .

Les questions 5-a et 5-b nécessitaient une bonne compréhension des questions précédentes (4 et 1-b) et ont été traitées dans les bonnes copies.

La question 5-c a été résolue correctement par de nombreux candidats, elle ne présentait pas de difficulté ; certains candidats ont remarqué que 1 est valeur co-propre de A, en utilisant conjointement 5-a et le fait que i est valeur propre de A.

La dernière question de cette partie a été assez peu traitée ; une solution correcte a été trouvée dans quelques bonnes copies.

2.2 - Deuxième partie

Beaucoup de candidats ont abordé cette partie.

La deuxième question a souvent été l'occasion de longs bavardages utilisant des récurrences qui n'aboutissent pas. Par contre, des candidats ont montré que $X_1, \ldots, X_k$ sont des vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ et ont utilisé le résultat afférent à des valeurs propres distinctes , ce qui est tout à fait correct.

Le corollaire de cette question a connu plus de succès et a été plus souvent mieux traité.

La question 3-a est immédiate. A quelques exceptions près, les candidats qui ont traité cette question ont trouvé $A\overline{A} = I_n$.

La question 3-b a été très sélective. Quelques candidats ont résolu correctement cette question, en écrivant : $S(\theta) = e^{i\theta}(A + e^{-2i\theta} I_n)$ et en faisant intervenir les valeurs propres de A.

Par contre, écrire qu'une somme de matrices inversibles est inversible est une argumentation non recevable ; la fin de la question a été mieux traitée sous réserve d'admettre l'existence de $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $S(\theta)$ soit inversible.

La question 4, lorsqu'elle a été abordée, a généralement été bien faite, à l'exception de rg (A) = rg ($A\overline{A}$).

La question 5 est une question de cours, il est dommage que des candidats n'aient pas précisé que la matrice de passage permettant de diagonaliser A était réelle.

Signalons qu'un candidat a affirmé : « une matrice symétrique réelle n'est pas nécessairement diagonalisable , il faudrait que son polynôme caractéristique soit scindé sur **R** ».

Dans cette dernière question , beaucoup de candidats ont eu des erreurs de vision en affirmant que A était symétrique, voire diagonale ! Idem pour C.

Peu ont été capables de justifier correctement que A n'est pas diagonalisable ; certains n'ont pas hésité à affirmer que A est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé.

Le cas de B a été mieux traité en ce qui concerne sa diagonalisabilité, quant à D , le fait qu'elle soit symétrique complexe ne permet pas d'emblée d'affirmer qu'elle est diagonalisable.

Voici une erreur non isolée, concernant A et que nous laissons aux candidats le soin de méditer : $P_A(X) = (i - X)^2 - 1 = (i - X - 1)(i - X + 1)$, par conséquent le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Enfin, peu de candidats ont étudié correctement la co-diagonalisabilité des matrices A, B, C, D.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Les conseils à donner aux futurs candidats ont déjà été énoncés dans les rapports des deux dernières années ; ils restent d'actualité. Nous allons les rappeler :

1) La pratique régulière du calcul est indispensable ; il est anormal de se tromper dans le calcul d'un discriminant, d'un produit de matrices d'ordre 2, du déterminant d'une matrice d'ordre 2.

2) La connaissance du cours est fondamentale, les énoncés des théorèmes doivent être cités avec précision.