1 - MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet proposé en mathématiques II, filière MP au Concours commun 2001, était une invitation au pays des approximations : estimation pour la norme uniforme sur un segment, de l'écart entre une fonction f et une suite de polynômes d'interpolation, en fonction de la classe de cette fonction.

Le sujet était classique dans les thèmes abordés . Beaucoup de points évoqués tant d'algèbre que d'analyse étaient largement connus :

- polynômes d'interpolation de Lagrange, de Hermite,

- propriétés des polynômes orthogonaux dans R[X] muni d'une structure d'espace préhilbertien,

- polynômes de Tchebychev.

Le problème était adapté aux candidats tant par la longueur que par la difficulté.

Dans sa rédaction, le problème comportait suffisamment de questions dont la réponse était fournie, pour ne pas bloquer les candidats. Par ailleurs des questions plus ouvertes permettaient de tester chez les candidats leurs qualités de réflexion et leur rigueur.

La première remarque portera sur l'impression désagréable fournie par la lecture des copies. La rédaction est souvent limitée à un vague charabia, déstructuré, mal écrit et mal présenté.

De plus pour beaucoup de candidats, démontrer se résume souvent à affirmer. Par exemple :

- la recherche de la dimension de E_n^o se résume à : *la dimension vaut n-1*, sans justification ni même tentative de preuve,

- les inégalités entre les modules de continuité se prouvent par de simples « on voit que », « il est évident ».

Il est clair que les exigences du concours ne peuvent se contenter de ce type de rédaction.

De plus, pour les questions où les réponses étaient fournies, de nombreux candidats n'éprouvent aucun scrupule, devant des incohérences, à arriver au résultat demandé. Ce genre d'escroquerie intellectuelle donne en général une bien mauvaise image de la copie.

Les techniques de base sont mal assimilées :

- développements limités. Peu de candidats se sortent de l'étude en 0 de la malheureuse fonction $f(t) = \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{t^4}$.

- calcul intégral.

Le changement de variable $u=\theta-t$ dans $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-t)K_n(t)dt$ a fait un malheur. De même des erreurs inattendues sont apparues : des candidats (en un nombre assez important) affirment que si une fonction h est continue et si $\int_{-a}^{a} h(t)dt = 0$ alors h est impaire !

- algèbre linéaire

Il est donc illusoire de vouloir faire un devoir correct quand ni le fond ni la forme ne sont maîtrisés.

De plus il est agaçant de voir une certaine psychose de l'erreur d'énoncé s'installer. L'entête du problème n'est pas un engagement à ce qu'il y ait des erreurs d'énoncé dans le texte.

Il est évidemment réconfortant de rencontrer des copies d'une qualité remarquable sur le fond mais également sur la forme .

II) REMARQUES PARTICULIERES

Une partie des candidats a commencé le problème par la seconde partie, ce qui pouvait se concevoir dans un premier temps puisque certaines questions faisaient partie des thèmes classiques couramment traités dans le programme de la classe de MP.

2.1 - Partie I

1-1) Cette question se caractérise par un maniement basique de la notion de borne supérieure et de notions de logique, en particulier dans le 1 c). Souvent celles ci sont mal utilisées. Les démonstrations ne sont souvent que des phrases creuses qui ne font que paraphraser l'énoncé.
On y trouve de tout : des récurrences sur le réel λ, des définitions erronées de la continuité uniforme.

1-2d) Des confusions grossières entre le local (Formule de Taylor Young) et le global (inégalité des accroissements finis) sont encore apparues maintes fois lors de cette question .

1-3a) Question facile, mais de nombreuses erreurs de calcul. Peu de candidats ont trouvé $C=\frac{2}{3}$.

1-2-b) Beaucoup d'erreurs dans l'utilisation des développements limités. Il ne ressort pas de manière claire que l'existence de la limite en 0 permet de prolonger par continuité la fonction en 0 et donc de la borner sur un segment.
On peut signaler, pour anecdote, qu'il n'y a pas **prolongation** de la fonction (il ne faut pas exagérer des matchs de football).
De plus, on peut attendre de candidats au concours commun qu'ils justifient dans un premier temps l'existence des intégrales qu'ils manipulent, telles celles utilisées dans la question.

1-2-c) N'a été abordée que par les candidats ayant compris le a) et b).

1-3-a) La parité a déjà posé de petits problèmes à certains.

Peu de candidats ont réussi à prouver correctement que $j_n[g](\theta)$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur où égal à 2n-2. Dans la plupart des copies la variable θ reste dans la fonction g, mais ces candidats arrivent (ce n'est pas très honnête) à prouver que $j_n[g](\theta)$ est un polynôme en la variable θ.

1-3-b) Question en général traitée.

1-4-a) Question facile mais souvent très mal rédigée, malgré l'indication donnée par le texte.

1-4-b) Un oubli souvent constaté : la fonction cos lipschitzienne de rapport 1.

1-4-b–c) Question souvent traitée, avec plus ou moins de bonheur. Au 1-4-c) beaucoup commettent des erreurs de calcul dans l'expression donnant $\Delta_n(f)$: un manque évident de maîtrise des indices.

2.2 - Partie II

On trouvait dans cette partie beaucoup de petites questions abordables et classiques. Celles ci n'ont cependant pas eu le succès attendu, les candidats s'étant certainement étiolés sur la partie I.

II-1-a) Question simple qui n'a donné pratiquement à chaque fois que des réponses affirmant la dimension, mais peu de preuves.

On peut rappeler que pour prouver que les vecteurs (e_k) avec $2 \leq k \leq n$ constituent une base de l'espace E_n^0, il faut déjà vérifier qu'ils sont dans cet espace.

II-1-b) Quelques étonnements dans cette question : des candidats qui ne savent pas écrire, en spéciales MP, la matrice de Φ_n dans la base ***B***.
L'existence d'une base ***B***' vérifiant les relations demandées est en général traitée.

II-1-c) Question souvent mal faite. Des vérifications incomplètes : on ne justifie pas bien l'existence de l'intégrale définissant J(P,Q). De plus la propriété $J(P,P)=0 \Rightarrow P=0$ donne lieu à des preuves encore inédites.

II-1-d) Très peu de candidats ont vu que $(\Phi_n(P) \mid Q) = (P \mid \Phi_n(Q))$, donc que l'application Φ_n était un endomorphisme auto-adjoint de E_n^0.

II-2-a) Peu de candidats ont constaté que Q_n est orthogonal à $R_{n-1}[x]$. Et donc qu'il fallait voir que si le degré de P est inférieur où égal à n-3, le polynôme $(1 - x^2)$ P est de degré inférieur où égal à n-1, c'est a dire orthogonal à Q_n.

II-2-b) Question classique, traitée correctement dans les meilleures copies.

II-3-a) Question facile et classique sur les polynômes d'interpolation de Lagrange. En général traité correctement.

II-3-b) Question immédiate à partir de la factorisation de Q_{n+1}.

II-4-a) La question était identique à la II-3-a) interpolation de Hermite. En général elle a été traitée correctement.

A partir de là, seuls quelques candidats ont réussi à faire la synthèse des informations contenues dans le texte pour prouver que la suite de fonctions $I_n(f)$ converge uniformément sur I vers f lorsque f est de classe C^1 sur I.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Ce problème, assez simple, a été un bon révélateur des insuffisances ou des qualités des candidats. Il a joué son rôle de sélection.

On peut suggérer aux futurs candidats :

- de faire un effort dans la rédaction de leur copie. Il est inadmissible de rencontrer des copies dans lesquelles aucun effort de présentation n'est fait ;

- d'être capable d'énoncer correctement les théorèmes utilisés. Ceci passe par une bonne connaissance et une bonne assimilation du cours ;

- de faire preuve de rigueur dans leur démonstration. On ne peut à ce niveau se contenter de l'approximatif.