MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 E - MATH II - filière PC

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le problème proposé avait pour objet l'étude de quelques propriétés de certaines équations différentielles du type : (E) $y''(t) + \varphi(t)\,y(t) = 0$

La longueur de l'épreuve, qui comportait cinq parties (dont les trois premières étaient indépendantes entre elles), a sans doute incité les candidats à survoler les questions des quatre premières parties, la cinquième étant rarement abordée.

Le sujet exigeait une bonne technicité sur des questions très classiques relatives

- aux séries de Fourier : coefficients, convergence (partie I),
- aux séries réelles alternées : critère spécial, encadrement de la somme (partie II),
- aux séries de fonctions : convergence uniforme, convergence normale, dérivation terme à terme (partie IV).

De nombreuses questions étaient accessibles à un candidat connaissant bien son cours, citons par exemple : les questions I. 1. et III. 1. a. utilisant le théorème de Cauchy, la question I. 2. a. utilisant le théorème de Dirichlet, la question II. 2. le critère spécial des séries réelles alternées, la question IV. 1. la convergence normale. Un tel candidat pouvait ainsi facilement obtenir une note supérieure à la moyenne.

Cependant de nombreux candidats ne maîtrisent pas le cours et sont incapables d'énoncer de façon précise les théorèmes utilisés ou bien ne se donnent pas la peine de vérifier que les hypothèses de ces théorèmes sont bien toutes satisfaites. On rencontre encore trop souvent des affirmations comme par exemple « cette suite est bien sûr décroissante…» alors que le résultat est loin d'être évident. Certains candidats n'hésitent pas non plus, pour arriver au résultat demandé, à maquiller les indices dans une sommation (question IV. 1. b.). Inutile de préciser que ces comportements (manque de rigueur ou d'honnêteté) sont pénalisés.

Signalons encore l'incapacité pour de nombreux candidats à exprimer correctement la négation d'une proposition (question III. 2. a.).

Les patronymes d'auteurs célèbres de théorèmes ont parfois été échangés : Gauss étant utilisé pour Cauchy, Parseval pour Dirichlet, ceci témoignant un manque regrettable de culture mathématique qui n'a pourtant pas été sanctionné.

Le manque important de rigueur de la part de nombreux candidats explique le fait que la moyenne générale soit restée inférieure à dix malgré un barème généreux. Notons que quelques candidats ayant abordé des questions plus difficiles (questions I. 3. b., V. 1. et 2.) ont obtenu la note maximale, sans toutefois traiter correctement le problème dans son intégralité. Une forte dispersion des notes a été observée avec peu de notes extrêmement basses car des questions faciles permettaient de gagner quelques points.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

<u>Partie I</u>

I.1. Question rarement bien traitée.

Peu nombreux sont les candidats qui pensent à appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $t \to h(t) = f(t+2\pi) - f(t)$, après avoir montré que h est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y''(t) + e^{it}\,y(t) = 0$.

De même, peu de candidats semblent savoir que si f est dérivable et 2π-périodique, sa dérivée *f'* est également 2π-périodique. D'autres candidats écrivent que les primitives d'une fonction continue 2π-périodique sont 2π-périodiques !

I. 2. a. Le théorème de Dirichlet, quand il est cité, est trop souvent amputé de l'hypothèse de continuité de *f*. Certains candidats ne s'aperçoivent pas que *f* est de classe C^2 sur R et donc C^1 par morceaux ; d'autres n'hésitent pas à se lancer, sans succès, dans la démonstration de ce théorème.

Dénonçons ici l'emploi trop fréquent d'abréviations plus ou moins classiques comme $C^0{}_{2\pi}M_x$, $C^1{}_{2\pi}M_x$,… qui ne saurait dispenser leur auteur de formuler les hypothèses explicites de ce théorème.

I. 2. b. et **c.** Trop de candidats dérivent la série de Fourier de *f* sans justifications alors qu'il n'était nullement nécessaire de procéder ainsi pour cette question.

Notons également des erreurs de signe ou de coefficients dans la relation entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$. Il est inadmissible de lire dans certaines copies : « $c_n(f) = c_{n-1}(f)/n^2 \quad \forall n \in Z$ » et de prendre de surcroît $n=0$ pour obtenir $c_{-1}(f)$. La démonstration par récurrence pour obtenir les coefficients de Fourier de rang positif de *f* en fonction de $c_0(f)$ est souvent correcte mais quelques erreurs dues aux précédentes subsistent. Certains confondent $(n\,!)^2$ et $(n^2)\,!$.

I. 3. a. Question rarement bien traitée.

Il s'agissait d'écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour la fonction *f* sur l'intervalle $[t\ ,\ t+h]$ et d'en déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange. Certains utilisent le théorème des accroissements finis ou font des majorations triviales qui ne font pas intervenir exclusivement la norme de la convergence uniforme de la fonction *f*, comme le demande le texte.

I. 3. b. Cette question, plus technique, n'a été qu'exceptionnellement traitée. Seuls quelques bons candidats se sont aperçus qu'il convenait de calculer le minimum de l'expression $h/2 + 1/h$ lorsque h décrit $]\ 0, \infty\ [$.

Partie II

II. 1. Question souvent bien traitée puisqu'il s'agissait de calculer le rayon de convergence d'une série entière. Pourtant trop de candidats oublient encore de considérer le module du quotient $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ et non le quotient seul avant d'utiliser le théorème de D'Alembert.

II. 2. Cette question assez dense nécessitait beaucoup de rigueur et a souvent été très superficiellement traitée par les candidats.

Le critère spécial sur les séries alternées à termes réels définissant les fonctions *g* et *g'* sur l'intervalle [0, 2] est souvent cité mais l'hypothèse de la décroissance à partir d'un certain rang du module du terme général de la série est oubliée ou n'est pas vérifiée ! L'encadrement de $g'(x)$ qui en résulte n'est pas donné.

La démonstration correcte de l'inégalité : $x_0>\sqrt{2}$ ne figure que dans de très rares copies.

Partie III

III. 1. a. Une bonne moitié des candidats ne pensent pas à utiliser le théorème de Cauchy et parmi ceux-ci, certains affirment qu'il y a bien unicité de la solution mais sans préciser quelle est cette solution et ne répondent pas ainsi à la question posée !

L'erreur suivante a été souvent rencontrée : « *si y est une fonction de classe* C^∞ *sur R et si* α *est un réel tel que :* $\forall n \in N$, $y^{(n)}(\alpha)=0$, *alors y est la fonction nulle* ».

Certains candidats affirment que α est racine double de *y* et donc que $y(t)=k(t-\alpha)^2$ avec *k* réel.

III. 1. b. Le calcul de $W'(t)$ est souvent effectué mais certains candidats trouvent que $W'(t)=0$, ce qui enlève toute possibilité de réponse à cette question.

III. 1. c. Trop peu de candidats pensent à remplacer *a* par τ dans l'équation différentielle (F) et à donner une solution particulière de (F) sous la forme d'un *sinus*.

La plupart du temps, les tentatives pour déduire la réponse du résultat III.1.b. sont maladroites et peu claires.

III. 2. a. Il est navrant de constater que de nombreux candidats sont incapables d'exprimer correctement la négation d'une proposition.

III. 2. b. Cette question délicate n'a été traitée correctement que de façon exceptionnelle. De nombreux candidats écrivent à tort qu'il y a une erreur dans l'inégalité proposée !

Partie IV

IV. 1. a. Cette partie a été souvent traitée.

La convergence uniforme sur $]-\infty, a]$ de la série de terme général $v_n(t)$ se déduisait aisément de la convergence normale de cette série sur le même intervalle.

L'erreur de certains candidats a été de démontrer la convergence uniforme de la suite de terme général $v_n(t)$ en imposant parfois une condition sur le signe du réel a.

De même, les démonstrations utilisant le critère spécial des séries alternées à termes réels n'ont en général pas abouti.

Notons également l'emploi abusif de la formule de Stirling pour $n\,!$ alors que ce n'était nullement nécessaire.

IV. 1. b. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions n'étant souvent pas appliqué correctement, de nombreux candidats n'ont pu démontrer que la fonction ψ était de classe C² sur R.

La relation $\psi''(t) + e^{t}\psi(t) = 0$ qui résultait du théorème précédent et d'un changement d'indice dans une sommation devait être démontrée avec soin. Ceci n'a pas été le cas pour un certain nombre de candidats, qui ont maquillé les indices ou rendu illisibles leurs calculs. Rappelons à ce propos que $(n-1)\,!$ n'existe pas pour $n=0$.

IV. 2. Il suffisait, pour résoudre cette question, de se rendre compte que $\psi(t)=g(e^{t})$ et d'appliquer les résultats des parties II. 2. et III. 1. c.

Partie V

V. 1. Question peu abordée et très rarement correctement traitée.

Signalons que certains candidats n'hésitent pas à dériver une inégalité et ne se demandent même pas si les deux membres de cette inégalité sont dérivables.

V. 2. a. Très peu de candidats ont vu qu'il suffisait d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 sur $[a, t]$ à une solution y de (E) sur $[a, +\infty[$ après avoir remplacé le produit $y(x)\,\varphi(x)$ par $-y''(x)$.

Quand elle est donnée, la réponse à cette question est souvent incomplète : on démontre que la fonction A est affine sans la déterminer explicitement.

V. 2. b. et 3. Questions très rarement abordées.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Les candidats ne doivent pas se laisser impressionner par la longueur du texte car le barème en tient largement compte. Ils doivent donc se garder de traiter très superficiellement un grand nombre de questions comme s'il était important de « participer » à chacune d'elles (certains se contentent même de recopier l'énoncé).

Les candidats sont invités, au contraire, à prendre le temps de la réflexion, à faire preuve de rigueur et à montrer qu'ils ont une bonne compréhension des questions posées.

Il est important de soigner la rédaction des solutions, ce qui nécessite non seulement une bonne maîtrise du cours mais aussi une bonne articulation logique du raisonnement.

Les théorèmes utilisés doivent être correctement énoncés et leurs hypothèses vérifiées sous peine d'être sanctionné.

Il est demandé aux candidats de rendre une copie claire et soignée en présentant des raisonnements cohérents et des calculs menés à terme, en évitant les passages illisibles et les fautes d'orthographe.

Rappelons, pour conclure, que la clarté, l’esprit critique et la rigueur sont des qualités souhaitables pour de futurs ingénieurs.