## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

#### CONCOURS D'ADMISSION 2016

FILIÈRE MP

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES -B-(X)

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\* \* \*

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$  dont la loi est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1,$$

et où  $(x_i)_{i\geqslant 0}$  est une suite de réels strictement positifs. On suppose que X admet une espérance finie notée  $m:=\mathbb{E}(X)>0$ .

Soit  $(X_k)_{k\geqslant 1}$  une suite de variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. On note  $(S_k)_{k\geqslant 0}$  ses sommes partielles définies par

$$S_0 = 0$$
, et pour  $n \geqslant 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

L'objet de ce problème est l'étude du nombre (aléatoire) d'éléments de la suite  $(S_n)_{n\geqslant 0}$  qui appartiennent à l'intervalle [a,b], défini pour  $\omega\in\Omega$  par

$$N(a,b)(\omega) = \operatorname{Card}\{k \in \mathbb{N} \mid S_k(\omega) \in [a,b]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_k \in [a,b])}(\omega),$$

et en particulier le comportement de N(a, b) quand a et b tendent vers l'infini.

## Première partie

1a. Justifier que pour tous  $\ell \geqslant 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(N(0,\ell) = n+1) = (S_n \leqslant \ell < S_{n+1})$ . En déduire que

$$(S_n \leqslant \ell) = (N(0,\ell) \geqslant n+1)$$
 et  $(S_n \geqslant \ell) \subset (N(0,\ell) \leqslant n+1)$ .

 ${f 1b.}$  On suppose dans cette question que X admet de plus une variance finie V. Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(S_n \leqslant n(m - \varepsilon)) \leqslant \frac{V}{\varepsilon^2 n}.$$

2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et qui admet une espérance. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant k).$$

**3a.** Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $\ell \geqslant 0$ ,

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant \mathbb{E}(\exp(\ell - S_n)),$$

puis que

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{\ell} \mathbb{E}(\exp(-X))^n.$$

**3b.** En déduire que  $\mathbb{P}(S_n \leq \ell)$  tend vers 0 quand  $n \to +\infty$  et que

$$\mathbb{E}(N(0,\ell)) \leqslant \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

**3c.** Montrer que pour tous  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ell \geqslant 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n, \ N(x, x+\ell) \geqslant k) \leqslant \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n) \mathbb{P}(N(0, \ell) \geqslant k),$$

puis que

$$\mathbb{E}(N(x,x+\ell)) \leqslant \frac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

### Deuxième partie

Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction. Si f est bornée, on note

$$||f||_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

sa norme uniforme. On appelle support de f l'adhérence de  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ . En particulier, si x n'appartient pas au support de f, alors f(x) = 0.

Soit K > 0 et  $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction positive bornée à support inclus dans [0, K]. On va étudier la suite de fonctions  $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  définies pour  $n \ge 0$  par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(g(x - S_k)).$$

- **4a.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$  est croissante. On note f(x) sa limite dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .
- **4b.** Montrer que si  $g = \mathbb{1}_{[0,K]}$ , alors  $f(x) = \mathbb{E}(N(x-K,x))$ .
- **4c.** En déduire que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \|g\|_{\infty} \frac{e^K}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

- **4d.** Conclure que la suite de fonctions  $f_n$  converge simplement vers une fonction f positive, bornée et dont le support est inclus dans  $\mathbb{R}^+$ .
- 5. Soit Y une variable aléatoire discrète, indépendante de X, et  $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  une fonction bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \mathbb{E}(\varphi(x_i,Y)).$$

**6a.** Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f_n(x - x_i).$$

**6b.** Montrer que la fonction f vérifie l'égalité suivante sur  $\mathbb R$ 

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i).$$
 (E)

- 7. Soit  $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction bornée qui vérifie  $h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x x_i)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- **7a.** Montrer que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $h(x) = \mathbb{E}(h(x S_n))$ .
- **7b.** En déduire que si de plus le support de h est inclus dans  $\mathbb{R}^+$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , h(x) = 0.
- 7c. Conclure qu'il existe une unique fonction bornée à support dans  $\mathbb{R}^+$  solution de (E).
- 8a. Montrer que l'ensemble  $\Lambda_X:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{y\in\mathbb{R}\mid \mathbb{P}(S_n=y)>0\}$  est dénombrable et inclus dans  $\mathbb{R}^+$

On se donne une énumération de cet ensemble :  $\Lambda_X = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$ 

**8b.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i).$$

**8c.** En déduire qu'il existe une suite de réels positifs  $(q_i)_{i\geqslant 0}$  telle que pour tout  $x\in\mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i g(x-y_i), \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}, \ y_i \in [x-K,x]} q_i = \mathbb{E}(N(x-K,x)).$$

- **9a.** Dans la formule précédente, montrer que la convergence de la série est normale sur tout segment de  $\mathbb{R}$ . On pourra utiliser la question 3c.
- **9b.** On suppose que g est continue. Montrer que f est uniformément continue.

**9c.** On suppose que g est de classe  $\mathscr{C}^1$ . Montrer que g' bornée. En déduire que f est de classe  $\mathscr{C}^1$ , que f' est bornée et uniformément continue et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(x - x_i).$$

## Troisième partie

Soit  $\Lambda$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^+_*$  tel que

$$\forall (x,y) \in \Lambda^2, \quad x+y \in \Lambda.$$

On dit que  $\Lambda$  est stable par addition.

**10a.** Montrer si  $(x,y) \in \Lambda^2$ ,  $(k,n) \in \mathbb{N}^2$  et  $k \leq n$ , alors  $nx + k(y-x) \in \Lambda$ .

On définit

$$\Gamma = \{ z \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists (x, y) \in \Lambda, \ z = y - x \}, \text{ et } r(\Lambda) = \inf \Gamma.$$

- 10b. Donner deux exemples de tels ensembles  $\Lambda$ , l'un pour lequel  $r(\Lambda) > 0$  et l'autre pour lequel  $r(\Lambda) = 0$ .
- 11. Dans cette question, on suppose que  $r(\Lambda) > 0$ .
- **11a.** Montrer qu'il existe  $(a,b) \in \Lambda^2$  tels que  $b-a \in [r(\Lambda), 2r(\Lambda)]$ .

On note d = b - a.

11b. Soient  $k, n \in \mathbb{N}$  tels que  $k \leq n-1$ . Montrer que

$$\Lambda \cap [na + kd, na + (k+1)d] = \{na + kd, na + (k+1)d\}.$$

- 11c. Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0 a + n_0 d > (n_0 + 1)a$  puis qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que a = kd.
- **11d.** En déduire que  $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$ , où  $d\mathbb{Z} = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
- 12. On suppose maintenant que  $r(\Lambda) = 0$ .
- **12a.** Soit  $\eta > 0$ . Montrer qu'il existe  $A \ge 0$  tel que pour pour tout x > A,

$$\Lambda \cap [x, x + \eta] \neq \emptyset$$
.

**12b.** Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. On suppose que pour toute suite  $(x_n)_{n\geqslant 0}$  à valeurs dans  $\Lambda$  telle que  $x_n\to +\infty$ ,  $f(x_n)\to 0$  quand  $n\to +\infty$ . Montrer que  $f(x)\to 0$  quand  $x\to +\infty$ .

#### Quatrième partie

On suppose dans cette partie que pour tout  $d \geqslant 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1.$$

13. On considère une fonction h uniformément continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) \leq h(0)$  et

$$h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i).$$

On rappelle que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h(x) = \mathbb{E}(h(x - S_n))$  (question 7a).

- **13a.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \ge 0$  tels que  $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$ , on a h(-x) = h(0).
- 13b. Montrer que l'ensemble  $\Lambda_X$  défini à la question 8a est stable par addition et que  $r(\Lambda_X)=0$ .
- 13c. En déduire que  $h(-x) \to h(0)$  quand  $x \to +\infty$ .
- 13d. Conclure que h est une fonction constante.

On suppose dans toute la suite que g est de classe  $\mathscr{C}^1$ , à support dans [0,K] avec K>0. On rappelle que f est la limite croissante des fonctions  $f_n$  et l'unique solution bornée et uniformément continue de l'équation (E).

14a. Prouver que la fonction  $x \mapsto \sup_{t \geqslant x} f'(t)$  admet une limite finie quand  $x \to +\infty$ . On note

$$c := \lim_{x \to +\infty} \sup_{t > x} f'(t).$$

**14b.** Montrer qu'il existe une suite  $y_n \to +\infty$  telle que  $f'(y_n) \to c$  quand  $n \to +\infty$ .

On admet qu'il existe une sous-suite  $(t_k)_{k\geqslant 0}$  de  $(y_n)_{n\geqslant 0}$  telle que la suite de fonctions  $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$  définies par

$$\xi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \xi_k(t) = f'(t+t_k)$$

converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  vers une fonction notée  $\xi$ .

- 14c. Montrer que  $\xi$  est constante, égale à c.
- **14d.** Conclure que c = 0.

On montrerait de même que  $\lim_{x\to +\infty}\inf f'(t)=0$ , résultat que l'on admet dans toute la suite.

- **14e.** En déduire que  $f'(t) \to 0$  quand  $t \to +\infty$ .
- **14f.** Montrer alors que pour tout  $\ell \geqslant 0$ ,  $f(t+\ell) f(t) \to 0$  quand  $t \to +\infty$ .

On suppose dans toute la suite de cette partie qu'il existe a>0 tel que  $\mathbb{P}(X\in[0,a])=1$  et on pose

$$g_0(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X > x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On admet que  $g_0$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t)dt = \mathbb{E}(X)$ .

On note  $\mathscr{F}$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux, positives, bornées et à support dans un segment de  $\mathbb{R}^+$ . En utilisant la deuxième partie, pour tout  $g \in \mathscr{F}$ , on note Lg l'unique solution de (E) bornée à support dans  $\mathbb{R}^+$ .

Nous dirons que la suite  $(t_k)_{k\geqslant 0}$  satisfait la propriété  $(\mathscr{P})$  si  $t_k\to +\infty$  et s'il existe une unique fonction continue bornée  $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ , telle que pour tout  $g\in\mathscr{F}$ ,

$$Lg(t_k) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mu(t)dt$$
 quand  $k \to +\infty$ .

On admet que pour toute suite  $(x_n)_{n\geqslant 0}$  tendant vers l'infini, il existe une sous suite  $(t_k)_{k\geqslant 0}$  de  $(x_n)_{n\geqslant 0}$  qui satisfait la propriété  $(\mathscr{P})$ .

**15a.** Montrer, en utilisant la question **14f**, que pour tous  $g \in \mathscr{F} \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  et  $\ell \geqslant 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)(\mu(t-\ell)-\mu(t))dt = 0.$$

- **15b.** En déduire que  $\mu$  est constante.
- **16a.** Montrer que  $Lg_0(x) = 1$  pour  $x \ge 0$  et  $Lg_0(x) = 0$  pour x < 0.
- **16b.** En déduire que  $\mu(t) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- 17. Conclure que pour tout  $g \in \mathscr{F}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(x-S_k)) \to \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

18. Soit  $\ell > 0$  fixé. Déterminer le comportement de  $\mathbb{E}(N(x, x + \ell))$  quand  $x \to +\infty$ . Interpréter le résultat. Ce résultat est-il vrai s'il existe d > 0 tel que  $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = 1$ ?

\* \*