École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Autour de l'inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \implies A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

La partie A *n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.*

A Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* $\geqslant 3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k - 1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k + 1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$

d'indices distincts dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k, j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k, j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

10. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k, j_k} = 1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i_k, j_{k+1}} = -1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet *un chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1} M_{\sigma(2),2} \cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On démontre par récurrence sur n, et on *admet* le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} > 0$ et on pose $\lambda_0 = \min_j (A_{\sigma(j),j})$ et $A_0 = \dfrac{1}{1 - \lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA\cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A,D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\|A-B\|^2 = \|D_AP - PD_B\|^2$.

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A-B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}|\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

où $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18. En déduire que

$$\min_\sigma \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A-B\|^2$$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout X de V, on note $X \sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1, P_2) de lois, on pose

$$d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X,Y \in V \\ X \sim P_1, Y \sim P_2}} \mathrm{E}(|X - Y|^2).$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels. On note P_1 la loi uniforme sur $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et P_2 la loi uniforme sur $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

19. Montrer que

$$d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{(i)} - b_{(i)}|^2$$

où l'on a noté $a_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{(n)}$ et $b_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{(n)}$ les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ ré-ordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, on a l'inégalité :

$$n\, d^2(P_1, P_2) \leqslant \|A - B\|^2.$$

Fin du problème