



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

# Mathématiques 1

MP

2016

4 heures

Calculatrices autorisées

## Matrices positives (im)primitives

Ce problème étudie diverses propriétés des matrices primitives et des matrices irréductibles, définies dans les parties III et V respectivement, et s'appuie sur la notion de chemin dans une matrice positive, que l'on définit dans le préambule.

### Généralités

- Dans tout le problème  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.  
Pour tous entiers naturels  $i$  et  $j$ , avec  $i \leq j$ , la notation  $\llbracket i, j \rrbracket$  désigne  $\{k \in \mathbb{N}, i \leq k \leq j\}$ .
- On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  
Si  $A$  est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on notera  $a_{i,j}$  ou  $[A]_{i,j}$  le coefficient de  $A$  situé en ligne  $i$  et colonne  $j$ .  
On note  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .  
On note  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale de coefficients diagonaux successifs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .  
Si  $A$  est une matrice carrée de terme général  $a_{i,j}$ , on note  $a_{i,j}^{(m)}$  le terme général de la matrice  $A^m$ .
- Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\text{Sp}(A)$  (spectre de  $A$ ) l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$ .  
On appelle *rayon spectral* de  $A$  la quantité  $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .  
On dit qu'une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  est *dominante* si :  $\forall \mu \in \text{Sp}(A) \setminus \{\lambda\}, |\mu| < |\lambda|$ .
- On identifie une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est canoniquement associé. Cela permet de légitimer les notations  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Ker}(A)$ .
- On note  $A^t$  la transposée d'une matrice  $A$ .
- On identifie un élément  $x = (x_i)$  de  $\mathbb{K}^n$  avec la matrice-colonne associée, ce qui légitime la notation  $Ax$  pour tout  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Dans ces conditions  $x^t$  désigne la matrice-ligne associée au vecteur  $x$ .
- Dans la partie IV, on munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique, défini par  $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y$ .

### Matrices positives

- On dit que  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *positive* et on note  $A \geq 0$ , si :  $\forall (i, j), a_{i,j} \geq 0$ .  
On dit que  $A$  est *strictement positive* et on note  $A > 0$ , si :  $\forall (i, j), a_{i,j} > 0$ .  
Ces définitions s'appliquent aux vecteurs  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  (notations  $x \geq 0$  ou  $x > 0$ ).  
On prendra bien garde au fait que l'implication  $(A \geq 0 \text{ et } A \neq 0) \Rightarrow A > 0$  est fautive !
- Il est clair (et on ne demande pas de le démontrer) que les puissances  $A^k$  (avec  $k \geq 1$ ) d'une matrice carrée positive (respectivement strictement positive) sont positives (respectivement strictement positives).

### Chemins dans une matrice positive

- Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
Un *chemin* dans  $A$  est une suite  $\mathcal{C} = (i_k)_{0 \leq k \leq m}$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , avec  $m \geq 1$ , telle que :  $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, a_{i_k, i_{k+1}} > 0$ .  
Un tel chemin sera noté :  $i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow \dots \rightarrow i_m$ .
- On dit que  $\mathcal{C}$  a pour *longueur*  $m$  et qu'il va de  $i_0$  (son *origine*) à  $i_m$  (son *extrémité*) en *passant* par les  $i_k$ .
- On dit que  $\mathcal{C}$  est un *chemin élémentaire* si  $i_0, \dots, i_m$  sont distincts deux à deux.
- On dit que  $\mathcal{C}$  est un *circuit* si  $i_m = i_0$  et un *circuit élémentaire* si de plus  $i_0, \dots, i_{m-1}$  sont distincts. Dans un circuit, la notion d'origine et d'extrémité perd de son intérêt. On pourra donc dire d'un circuit qu'il *pass*e par un indice  $i$  (sans se préoccuper de la position de  $i$  dans ce circuit).

### I Si $\rho(A) < 1$ , alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$

Cette partie est pratiquement indépendante du reste du problème. Elle démontre un résultat qui ne sera utilisé que dans la question IV.B.

On dit qu'une norme  $A \mapsto \|A\|$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est *sous-multiplicative* si :  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

#### I.A – Deux exemples de normes sous-multiplicatives

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pose  $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ .

**I.A.1)** Montrer que l'application  $A \mapsto N(A)$  est une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**I.A.2)** Soit  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A \mapsto \|A\| = N(Q^{-1}AQ)$  est une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**I.B – Une conséquence de l'inégalité  $\rho(A) < 1$** 

On se donne  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , avec  $\rho(A) < 1$ . On veut montrer que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$ .

**I.B.1)** Soit  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  et soit  $T$  triangulaire supérieure, telles que  $A = PTP^{-1}$ . On se donne  $\delta > 0$ . On pose  $\Delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$  et  $\widehat{T} = \Delta^{-1}T\Delta$ .

Montrer que  $\widehat{T}$  est triangulaire supérieure et qu'on peut choisir  $\delta$  de sorte que  $N(\widehat{T}) < 1$ .

**I.B.2)** Avec ce choix de  $\delta$ , on pose  $Q = P\Delta$  et on munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la norme  $M \mapsto \|M\| = N(Q^{-1}MQ)$ .

Montrer que  $\|A\| < 1$  et en déduire  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$ .

**II Chemins dans les matrices positives**

Cette partie aborde les notions de base sur les chemins dans une matrice positive  $A$  (et notamment le lien entre l'existence de tels chemins et le caractère strictement positif de coefficients des puissances de  $A$ ).

Une bonne compréhension des résultats démontrés ici est importante dans la perspective des parties III et IV.

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**II.A – Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire**

Montrer que s'il existe dans  $A$  un chemin de  $i$  vers  $j$ , avec  $i \neq j$ , alors il existe un chemin *élémentaire* de  $i$  vers  $j$  et de longueur  $\ell \leq n - 1$ . De même, montrer que s'il existe dans  $A$  un circuit passant  $i$ , alors il existe un circuit *élémentaire* passant par  $i$  et de longueur  $\ell \leq n$ .

**II.B – Une caractérisation de l'existence d'un chemin de  $i$  à  $j$** 

Soit  $A \geq 0$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $i, j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $m \geq 1$ . Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans  $A$  un chemin d'origine  $i$ , d'extrémité  $j$ , de longueur  $m$  ;
- le coefficient d'indice  $i, j$  de  $A^m$  (noté  $a_{i,j}^{(m)}$ ) est strictement positif.

On pourra procéder par récurrence sur l'entier  $m \geq 1$ .

**II.C – Chemins dans une puissance de  $A$** 

Soit  $i, j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et soit  $\ell$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans  $A^m$  un chemin d'origine  $i$ , d'extrémité  $j$ , de longueur  $\ell$  ;
- il existe dans  $A$  un chemin d'origine  $i$ , d'extrémité  $j$ , de longueur  $m\ell$ .

**III Matrices primitives et indice de primitivité**

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \geq 0$ . On dit que  $A$  est *primitive* s'il existe  $m \geq 1$  tel que  $A^m > 0$ .

Avec cette définition, il est clair que toute matrice carrée strictement positive est primitive.

Dans toute la suite, *matrice primitive* signifie *matrice carrée positive primitive*.

Si  $A$  est primitive, on appelle *indice de primitivité* de  $A$  le plus petit entier  $m \geq 1$  tel que  $A^m > 0$ .

**III.A – Chemins élémentaires dans une matrice primitive**

Soit  $A$  une matrice primitive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que pour tous  $i \neq j$  il existe dans  $A$  un chemin élémentaire de  $i$  à  $j$  et de longueur  $\ell \leq n - 1$ , et que pour tout  $i$  il existe dans  $A$  un circuit élémentaire passant par  $i$  et de longueur  $\ell \leq n$ .

**III.B – Puissances d'une matrice primitive**

**III.B.1)** Donner un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive.

**III.B.2)** Soit  $B > 0$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $x \geq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $x \neq 0$ . Montrer que  $Bx > 0$ .

**III.B.3)** Soit  $A$  une matrice primitive et  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^m > 0$ . Montrer que  $\forall p \geq m, A^p > 0$ .

On pourra remarquer, en le justifiant, qu'aucune des colonnes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de  $A$  n'est nulle.

**III.B.4)** Prouver que si  $A$  est primitive, alors  $A^k$  est primitive pour tout  $k \geq 1$ .

**III.B.5)** Montrer que le rayon spectral d'une matrice primitive est strictement positif.

**III.C – La matrice de Weilandt**

On définit la matrice  $W_n = (w_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i < n \text{ et } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour  $n = 5$ ,  $W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Le but de cette question est de prouver que  $W_n$  est primitive, d'indice de primitivité  $n^2 - 2n + 2$ .

**III.C.1)** Montrer que le polynôme caractéristique de  $W_n$  est  $X^n - X - 1$ .

En déduire  $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$ , puis que  $W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$ .

**III.C.2)** Préciser le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice  $W_n$ .

En déduire que la matrice positive  $W_n^{n^2-2n+1}$  n'est pas strictement positive.

**III.C.3)** Montrer que pour tous  $i, j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , avec  $i \neq j$ , il existe dans  $W_n$  au moins un chemin d'origine  $i$ , d'extrémité  $j$ , et de longueur inférieure ou égale à  $n - 1$ .

On pourra traiter successivement les deux cas  $1 \notin \{i, j\}$  et  $1 \in \{i, j\}$ .

En déduire que la matrice  $W_n^{n^2-2n+2}$  est strictement positive et conclure.

### III.D – Indice de primitivité maximum

Le but de cette sous-partie est de prouver que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est primitive, on a toujours  $A^{n^2-2n+2} > 0$ , c'est-à-dire que l'indice de primitivité de  $A$  est inférieur ou égal à  $n^2 - 2n + 2$ . Ce majorant est en fait un maximum, comme on l'a vu avec la matrice  $W_n$  de Weilandt dans la question précédente.

Dans toute cette sous-partie,  $A$  est une matrice primitive donnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On peut donc appliquer à la matrice  $A$  les résultats de la question III.A.

En particulier, on note  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de  $A$ .

**III.D.1)** Par l'absurde, on suppose  $\ell = n$ .

Montrer qu'alors tous les circuits de  $A$  sont de longueur multiple de  $n$ .

En déduire que les matrices  $A^{kn+1}$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ ) sont de diagonale nulle et aboutir à une contradiction.

**III.D.2)** D'après ce qui précède, il existe dans  $A$  un circuit élémentaire  $\mathcal{C}$  de longueur  $\ell \leq n - 1$ .

Pour simplifier la rédaction, et parce que cela n'enlève rien à la généralité du problème, on suppose qu'il s'agit du circuit  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow \ell - 1 \rightarrow \ell \rightarrow 1$  (les  $n - \ell$  indices restants  $\ell + 1, \ell + 2, \dots, n$  étant donc situés « en dehors » du circuit  $\mathcal{C}$ ).

Nous allons montrer que  $A^{n+\ell(n-2)}$  est strictement positive.

Pour cela, on se donne  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Tout revient à établir qu'il existe dans  $A$  un chemin d'origine  $i$ , d'extrémité  $j$  et de longueur  $n + \ell(n - 2)$ .

a) Montrer que dans  $A$ , on peut former un chemin d'origine  $i$ , de longueur  $n - \ell$ , et dont l'extrémité est dans  $\{1, 2, \dots, \ell\}$  (on notera  $k$  cette extrémité).

On pourra traiter le cas  $1 \leq i \leq \ell$ , puis le cas  $\ell + 1 \leq i \leq n$ .

b) Dire pour quelle raison les  $\ell$  premiers coefficients diagonaux de  $A^\ell$  (et en particulier le  $k$ -ième) sont strictement positifs.

Montrer alors qu'il existe un chemin de longueur  $n - 1$  dans  $A^\ell$  (c'est-à-dire un chemin de longueur  $\ell(n - 1)$  dans  $A$ ) d'origine  $k$  et d'extrémité  $j$ .

c) En déduire finalement  $A^{n+\ell(n-2)} > 0$ , puis  $A^{n^2-2n+2} > 0$ .

## IV Étude des puissances d'une matrice primitive

Cette partie utilise uniquement la définition des matrices primitives : elle est pratiquement indépendante de la partie III. Par ailleurs, les résultats de la partie IV ne seront pas réutilisés dans les parties V et VI.

Pour toute matrice primitive  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on admet le résultat suivant :

*Le rayon spectral  $\rho(A)$  de  $A$  (dont on sait qu'il est strictement positif) est une valeur propre dominante de  $A$  et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle qui possède un vecteur directeur  $x > 0$ .*

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour simplifier les notations, on note  $r$  (plutôt que  $\rho(A)$ ) le rayon spectral de  $A$ . On rappelle que  $r > 0$ .

Il est clair que  $A^\top$  est primitive, et que  $A$  et  $A^\top$  ont le même rayon spectral  $r$ .

On peut donc noter  $x$  (respectivement  $y$ ) un vecteur directeur strictement positif de la droite  $D = \text{Ker}(A - rI_n)$  (respectivement de la droite  $\Delta = \text{Ker}(A^\top - rI_n)$ ). On note  $H = \text{Im}(A - rI_n)$ .

Quitte à multiplier  $y$  par un coefficient strictement positif adéquat, on suppose  $(y | x) = \bar{y}^\top x = 1$ .

On note  $L = x y^\top$  (c'est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

### IV.A – Puissances de la matrice $B = A - rL$

**IV.A.1)** Montrer que  $H$  est l'hyperplan orthogonal à la droite  $\Delta$  (c'est-à-dire  $H = \Delta^\perp$ ).

**IV.A.2)** Prouver que  $L$  est la matrice, dans la base canonique, de la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur la droite  $D$ , parallèlement à l'hyperplan  $H$ .

**IV.A.3)** Vérifier que  $L$  est de rang 1, qu'elle est strictement positive, et que  $L^\top y = y$ .

**IV.A.4)** Montrer que  $AL = LA = rL$ . En déduire :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, (A - rL)^m = A^m - r^m L$ .

**IV.B – La matrice  $B = A - rL$  vérifie  $\rho(B) < r$**

Dans cette question, on pose  $B = A - rL$ . On va montrer que  $\rho(B) < r$  et en déduire un résultat intéressant sur la suite des puissances successives de  $A$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre *non nulle* de  $B$  et soit  $z$  un vecteur propre associé.

**IV.B.1)** Montrer que  $Lz = 0$ , puis  $Az = \lambda z$ . En déduire  $\rho(B) \leq r$ .

**IV.B.2)** Par l'absurde, on suppose  $\rho(B) = r$ . On peut donc choisir  $\lambda$  de telle sorte que  $|\lambda| = r$ . Montrer qu'alors  $\lambda = r$  puis  $Lz = z$  et aboutir à une contradiction. Conclure.

**IV.B.3)** Déduire de ce qui précède (et de la sous-partie IV.A) que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L$ .

**IV.C – Le rayon spectral de  $A$  est une valeur propre simple**

Dans cette sous-partie, on montre que la valeur propre dominante de  $A$  (c'est-à-dire son rayon spectral  $r$ ) est *simple* (on sait déjà que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle).

Soit  $\mu$  la multiplicité de  $r$  comme valeur propre de  $A$  et soit  $T = PAP^{-1}$  une réduite triangulaire de  $A$ .

En examinant la diagonale de  $\left(\frac{1}{r}T\right)^m$  quand  $m \rightarrow +\infty$ , montrer que  $\mu = 1$ .

## V Matrices carrées positives irréductibles

Soit  $A = (a_{i,j})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \geq 0$ . On dit que  $A$  est *irréductible* si, pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $m \geq 0$  (dépendant a priori de  $i$  et  $j$ ) tel que  $a_{i,j}^{(m)} > 0$ .

Avec cette définition, il est clair que toute matrice primitive est irréductible.

Dans toute la suite, *matrice irréductible* signifie *matrice carrée positive irréductible*.

Dans toute cette partie,  $A$  est une matrice positive donnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**V.A – Premières propriétés des matrices irréductibles**

**V.A.1)** Exprimer l'irréductibilité de  $A$  en termes de chemins dans  $A$ .

**V.A.2)** Montrer que si  $A$  est irréductible, alors pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  (dépendant a priori de  $i$  et  $j$ ) tel que  $a_{i,j}^{(m)} > 0$ .

**V.A.3)** Donner un exemple simple d'une matrice carrée irréductible mais non primitive.

**V.A.4)** Montrer que si  $A$  n'est *pas* irréductible, alors  $A^2$  n'est *pas* irréductible.

En revanche, donner un exemple simple d'une matrice  $A$  irréductible telle que  $A^2$  ne soit pas irréductible.

**V.A.5)** Montrer que le rayon spectral d'une matrice irréductible est strictement positif.

**V.B – Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire**

**V.B.1)** Pour la matrice positive  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- la matrice  $A$  est irréductible ;
- la matrice  $B = I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$  est strictement positive ;
- la matrice  $C = (I_n + A)^{n-1}$  est strictement positive.

**V.B.2)** Soit  $A$  irréductible. Montrer qu'aucune ligne (et aucune colonne) de  $A$  n'est identiquement nulle.

**V.C – Deux conditions suffisantes de primitivité**

Dans cette question,  $A$  est une matrice *irréductible* donnée.

**V.C.1)** On suppose que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} > 0$ . Montrer que  $A^{n-1} > 0$  (donc  $A$  est primitive).

On raisonnera en termes de chemins dans  $A$ .

**V.C.2)** On suppose que :  $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} > 0$ . Montrer que  $A$  est primitive.

Pour tous  $j$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pourra montrer qu'il existe dans  $A$  un chemin de  $j$  à  $k$  et passant par  $i$ , et considérer le maximum  $m$  des longueurs des chemins ainsi obtenus. On prouvera que  $A^m > 0$ .

## VI Le coefficient d'imprimitivité

Soit  $A = (a_{i,j})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \geq 0$ .

On dit que  $A$  est *imprimitive* si  $A$  est irréductible mais n'est pas primitive.

Pour toute matrice  $A$  imprimitive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on admet le résultat suivant :

*Les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$  telles que  $|\lambda| = \rho(A)$  sont simples. Ce sont les solutions de l'équation  $\lambda^p = \rho(A)^p$  pour un certain entier  $p \geq 2$ . En particulier  $\rho(A)$  est valeur propre simple de  $A$ . Plus généralement, la totalité du spectre de  $A$  est invariante dans la multiplication par  $\omega = \exp(2i\pi/p)$ . Par ailleurs, et pour la valeur propre  $\rho(A)$ , la matrice  $A$  possède un vecteur propre  $x > 0$ .*

L'indice  $p \geq 2$  dont il est question dans le résultat précédent est appelé le *coefficient d'imprimitivité* de  $A$ .

*Remarque* : si on rapproche ce qui précède et le résultat admis au début de la partie IV, on peut fort bien dire qu'une matrice primitive a pour coefficient d'imprimitivité  $p = 1$ .

### VI.A – Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

Soit  $A$  une matrice imprimitive de coefficient d'imprimitivité  $p \geq 2$ .

Pour tout entier  $m$  non multiple de  $p$ , montrer que la diagonale de  $A^m$  est identiquement nulle.

On pourra s'intéresser à la trace de  $A^m$ .

En déduire que le résultat de la question IV.B.3 ne tient plus si  $A$  est imprimitive.

### VI.B – Une matrice de Weilandt « modifiée »

On définit la matrice  $Z_n = (z_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i < n \text{ et } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) \in \{(n-1, 1), (n, 2)\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour  $n = 5$  :  $Z_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Le but de cette question est de prouver que  $Z_n$  est imprimitive.

**VI.B.1)** Montrer que la matrice  $Z_n$  est irréductible.

**VI.B.2)** Montrer que le polynôme caractéristique de  $Z_n$  est  $X(X^{n-1} - 2)$ .

En déduire que  $Z_n$  est imprimitive et préciser son coefficient d'imprimitivité.

**VI.B.3)** Montrer que  $Z_n^{n^2-2n+2} = 2^{n-1} Z_n$  et retrouver le fait que  $Z_n$  n'est pas primitive.

### VI.C – Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Soit  $A \geq 0$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice irréductible. On note  $r$  son rayon spectral.

Soit  $p \geq 1$  le coefficient d'imprimitivité de  $A$  (rappel : par convention,  $p = 1$  si  $A$  est primitive).

Soit  $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1} X^{n-k_1} + c_{k_2} X^{n-k_2} + \dots + c_{k_s} X^{n-k_s}$  son polynôme caractéristique, écrit suivant les puissances décroissantes et en ne laissant apparaître que les coefficients  $c_k$  non nuls.

On va montrer la propriété suivante : *l'entier  $p$  est le pgcd des entiers  $k_1, k_2, \dots, k_s$ .*

**VI.C.1)** On rappelle que le spectre de  $A$  est invariant par le produit  $z \mapsto \omega z$ , où  $\omega = \exp(2i\pi/p)$ .

En déduire que, pour tout  $k \in \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ , l'entier  $k$  est divisible par  $p$ .

Penser aux fonctions symétriques élémentaires des  $\lambda_i$ .

**VI.C.2)** Réciproquement, on suppose par l'absurde que les  $k_j$  sont tous divisibles par  $qp$ , avec  $q \geq 2$ .

On pose  $\beta = e^{2i\pi/(qp)}$  (donc  $\beta^q = \omega$ ). Montrer que  $\beta r$  est valeur propre de  $A$  et conclure.

### VI.D – Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits

Dans cette question, on va établir un théorème de Romanovsky en 1936, établissant que le coefficient d'imprimitivité  $p$  d'une matrice irréductible (éventuellement  $p = 1$  dans le cas d'une matrice primitive) est le pgcd des longueurs des circuits passant un indice donné (ce pgcd ne dépendant en fait pas de l'indice en question).

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice irréductible. Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $L_i = \{m \in \mathbb{N}^*, a_{i,i}^{(m)} > 0\}$  l'ensemble (non vide) des longueurs des circuits de  $A$  qui passent par  $i$ , et on note  $d_i$  le pgcd des éléments de  $L_i$ .

**VI.D.1)** Soit  $i, j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On sait qu'il existe  $r$  et  $s$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $a_{i,j}^{(r)} > 0$  et  $a_{j,i}^{(s)} > 0$ .

Pour tout  $k$  dans  $\{0\} \cup L_j$ , montrer que  $d_i$  divise  $r + k + s$ . En déduire que  $d_i$  divise  $d_j$ .

Par symétrie, il en résulte évidemment que tous les  $d_i$  sont égaux. On note  $d$  leur valeur commune.

**VI.D.2)** Montrer que si  $p = 1$  (c'est-à-dire si  $A$  est primitive), alors  $d = 1$  (utiliser la question III.B.3).

**VI.D.3)** Dans la suite de cette question, on suppose  $p \geq 2$ .

Montrer que  $p$  divise  $d$  (utiliser la question VI.A).

**VI.D.4)** On va montrer que  $d$  divise  $p$ . Il en résultera bien sûr l'égalité  $d = p$ .

On rappelle que la diagonale de  $A$  est nulle (c'est une conséquence de la question VI.A).

Soit  $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$ .

On sait que  $\chi_A(x) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n [xI_n - A]_{j, \sigma(j)}$ , où la somme est étendue aux permutations  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On fixe une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\Psi(\sigma) = \prod_{j=1}^n [xI_n - A]_{j, \sigma(j)}$  et on suppose  $\Psi(\sigma) \neq 0$ .

On note  $H$  l'ensemble des éléments  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\sigma(j) \neq j$ , et  $\text{card}(H) = h$ , avec  $0 \leq h \leq n$ .

a) Montrer que  $\Psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j, \sigma(j)}$ .

b) La restriction à  $H$  de la permutation  $\sigma$  se décompose en produits de cycles à supports disjoints (et de longueur  $\geq 2$  puisque par hypothèse aucun des éléments de  $H$  n'est invariant par  $\sigma$ ).

Soit  $s = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ , avec  $m \geq 2$ , l'un quelconque des cycles entrant dans cette décomposition.

Montrer que  $j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \dots \rightarrow j_m \rightarrow j_1$  est un circuit dans la matrice  $A$ .

En déduire que  $m$ , puis  $h$ , sont des multiples de  $d$ .

c) Montrer finalement que  $\chi_A(x)$  s'écrit :  $\chi_A(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \dots + \alpha_k x^{n-kd} + \dots$

En déduire que  $d$  est un diviseur de  $p$  (utiliser le résultat de la question VI.C). Conclure.

---

• • • FIN • • •

---