Mathématiques 2

PC

2015

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

L'objet du problème est l'étude de quelques outils permettant l'étude des signaux déterministes.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à *support compact* s'il existe deux réels a et b vérifiant $a < b$ tels que f est nulle en dehors du segment $[a,b]$.

On considère dans tout le problème l'ensemble $\mathcal{F}_{sr}$ des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on appelle de telles fonctions des signaux réguliers.

On note $f^{(k)}$ la fonction dérivée k-ième d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$; si $k=0$, $f^{(k)}=f$.

I Étude de nouveaux espaces fonctionnels

I.A – Fonction test $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Dans cette sous-partie, on note φ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ \varphi(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

I.A.1)

a) Étudier les variations de φ.

b) Tracer la représentation graphique de φ.

c) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$.

d) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.

I.A.2) Montrer que la fonction dérivée de tout élément de $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{D}$.

I.A.3)

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

b) Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\rho_n(x) = n\theta(nx)$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}_{sr}$ et tout entier naturel non nul n, on pose

$$(f * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

I.A.4) Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}_{sr}$.

Montrer que la fonction $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

I.A.5) Soit I la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[-1,1]$, et 0 ailleurs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = I * \rho_n(x)$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $I_n(x)$ en fonction de φ.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n appartient à $\mathcal{D}$ et étudier ses variations.

c) Représenter graphiquement I_2 et I_3.

d) Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement vers une fonction J que l'on déterminera. Montrer que J et I sont égales sauf sur un ensemble fini de points.

e) La suite de fonction (I_n) converge-t-elle uniformément vers J ?

I.B – Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide

On dit qu'une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est à décroissance rapide si

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x\to+\infty} x^m f^{(n)}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide.

I.B.1) Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Montrer que si f est dans $\mathcal{S}$ alors $f^{(p)}$ est dans $\mathcal{S}$ pour tout entier naturel p.

I.B.3) Montrer que si P est une fonction polynôme et si f est dans $\mathcal{S}$, alors Pf appartient à $\mathcal{S}$.

II Espace des distributions sur $\mathcal{D}$

II.A – Définitions, exemples

On dit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers la fonction φ de $\mathcal{D}$ et on note $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$ et s'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > a \Longrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

On appelle distribution sur $\mathcal{D}$ toute application linéaire $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \qquad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longrightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$$

On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}$.

II.A.1) Montrer que si $f \in \mathcal{F}_{sr}$ alors l'application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

On appelle distribution régulière toute distribution de la forme T_f, où $f \in \mathcal{F}_{sr}$.

II.A.2) Soit U la fonction définie par

$$\begin{cases} U(x) = 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ U(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Justifier que U définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

II.A.3) Soit a un nombre réel.

a) Montrer que l'application δ_a qui à tout $\varphi \in \mathcal{D}$ associe $\varphi(a)$ est une distribution.

b) En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{(t-a)^2}{(t-a+1/n)(t-a-1/n)}\right) & \text{si } t \in \left]a-1/n, a+1/n\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que $\forall f \in \mathcal{F}_{sr}$, $T_f \neq \delta_a$.

II.B – Dérivation des distributions sur $\mathcal{D}$

Si T est une distribution sur $\mathcal{D}$, on définit la distribution dérivée T' par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

II.B.1) Justifier que T' est une distribution sur $\mathcal{D}$.

Dans la suite du problème, pour $f \in \mathcal{F}_{sr}$, on notera $T'_f = (T_f)'$.

II.B.2) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $(T_f)' = T_{f'}$. Adapter ce résultat au cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

II.B.3) Montrer que $T'_U = \delta_0$.

II.B.4) On considère l'application T qui à toute fonction φ de $\mathcal{D}$ associe le nombre réel $T(\varphi)$ défini par

$$T(\varphi) = \int_{-1}^{0} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que T est une distribution régulière.

b) Calculer la dérivée de cette distribution.

II.B.5) Si f est un élément de $\mathcal{F}_{sr}$ et si a est un réel, on pose

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$$

La différence $f(a^+) - f(a^-)$, appelée saut en a, est notée $\sigma(a)$.

a) Soient $a_1, \dots, a_p$ des réels tels que $a_1 < \dots < a_p$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On suppose de plus que f est continue sur $]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \dots \cup]a_p, +\infty[$.

Montrer que

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma(a_i)\delta_{a_i}$$

b) Retrouver par cette méthode les résultats des questions II.B.3 et II.B.4.b.

II.C – Suites de distributions sur $\mathcal{D}$

On dit que la suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution T si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

II.C.1) Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction U_n nulle sur les réels négatifs, affine sur l'intervalle $[0, 1/n]$, égale à 1 pour les réels plus grand que $1/n$ et continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la suite de distributions régulières $(T_{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T_U.

b) Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad T_{U_n}'(\varphi) = \int_0^{1/n} n\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire que la distribution T_{U_n}' est régulière et donner une fonction V_n telle que $T_{V_n} = T_{U_n}'$.

d) Représenter V_n pour $n = 1, 2, 4$.

e) Montrer que si la suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution T, alors $(T_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T'.

f) Quelle est la limite de T_{U_n}' quand n tend vers l'infini ?

II.C.2) Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2} & \\ g_n(x) = nx^n & \text{si } x \in [0,1] \text{ et nulle ailleurs} \\ h_n(x) = n^2 \sin nx & \text{si } x \in [-\pi/n, \pi/n] \text{ et nulle ailleurs} \end{cases}$$

a) Vérifier qu'elles appartiennent à $\mathcal{F}_{sr}$.

b) Étudier les variations des fonctions f_n, g_n et h_n puis tracer leur représentation graphique pour $n = 1$ et $n = 2$.

c) Étudier la convergence des suites de distributions (T_{f_n}), (T_{g_n}) et (T_{h_n}).

• • • FIN • • •