



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

# Mathématiques 1

PC

2015

4 heures

Calculatrices autorisées

Dans ce problème,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , pour tout sous-espace  $F$  de  $E$  stable par  $f$  on note  $f_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ , c'est-à-dire défini sur  $F$  par  $f_F(x) = f(x)$  pour tout  $x$  dans  $F$ .

Pour tout endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  on définit la suite  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  des puissances de  $f$  par

$$\begin{cases} f^0 = \text{Id}_E \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \end{cases} \text{ pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}$$

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  le sous-espace de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes de degré au plus égal à  $n$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'espace des matrices carrées à  $n$  lignes et à éléments dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est l'espace des matrices colonnes à  $n$  lignes et à éléments dans  $\mathbb{K}$ .

## I Première partie

Dans cette partie,  $f$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

**I.A** – Montrer qu'une droite  $F$  engendrée par un vecteur  $u$  est stable par  $f$  si et seulement si  $u$  est un vecteur propre de  $f$ .

**I.B** –

**I.B.1)** Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  et donner un exemple d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet que deux sous-espaces stables.

**I.B.2)** Montrer que si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 2$  et si  $f$  est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  et au moins quatre lorsque  $n$  est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet que trois sous-espaces stables.

**I.C** –

**I.C.1)** Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de  $f$  est stable par  $f$ . Préciser l'endomorphisme induit par  $f$  sur tout sous-espace propre de  $f$ .

**I.C.2)** Montrer que si  $f$  admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de  $E$  stables par  $f$ .

**I.C.3)** Que dire de  $f$  si tous les sous-espaces de  $E$  sont stables par  $f$  ?

**I.D** – Dans cette sous-partie,  $E$  est un espace de dimension finie.

**I.D.1)** Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors tout sous-espace de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $f$ .

On pourra partir d'une base de  $F$  et d'une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

**I.D.2)** Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et si tout sous-espace de  $E$  stable par  $f$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $f$ , alors  $f$  est diagonalisable.

Qu'en est-il si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ?

## II Deuxième partie

Dans cette partie,  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels au moins égaux à 2,  $f$  est un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , qui admet  $p$  valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $E_i$  le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**II.A** – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $f$  si et seulement si  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ .

**II.A.1)** Montrer que tout sous-espace  $F$  de  $E$  tel que  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$  est stable par  $f$ .

**II.A.2)** Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $f$  et  $x$  un vecteur non nul de  $F$ .

Justifier l'existence et l'unicité de  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  dans  $E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ .

**II.A.3)** Si on note  $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$ ,  $H_x$  est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que  $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $1 \leq r \leq p$ . Ainsi on a  $x = \sum_{i=1}^r x_i$  avec  $x_i \in E_i \setminus \{0\}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ .

On note  $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ .

Montrer que  $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $V_x$ .

**II.A.4)** Montrer que pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $f^{j-1}(x)$  appartient à  $V_x$  et donner la matrice de la famille  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  dans la base  $\mathcal{B}_x$ .

**II.A.5)** Montrer que  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  est une base de  $V_x$ .

**II.A.6)** En déduire que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $x_i$  appartient à  $F$  et conclure.

**II.B** – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où  $p = n$ .

**II.B.1)** Préciser la dimension de  $E_i$  pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

**II.B.2)** Combien y a-t-il de droites de  $E$  stables par  $f$  ?

**II.B.3)** Si  $n \geq 3$  et  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , combien y a-t-il de sous-espaces de  $E$  de dimension  $k$  et stables par  $f$  ?

**II.B.4)** Combien y a-t-il de sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  dans ce cas ? Les donner tous.

### III Troisième partie

**III.A** – On considère l'endomorphisme  $D$  de dérivation sur  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $D(P) = P'$  pour tout  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**III.A.1)** Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par  $D$  et donner la matrice  $A_n$  de l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $\mathbb{K}_n[X]$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**III.A.2)** Soit  $F$  un sous-espace de  $\mathbb{K}[X]$ , de dimension finie non nulle, stable par  $D$ .

a) Justifier l'existence d'un entier naturel  $n$  et d'un polynôme  $R$  de degré  $n$  tels que  $R \in F$  et  $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ .

b) Montrer que la famille  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $F$ .

c) En déduire que  $F = \mathbb{K}_n[X]$ .

**III.A.3)** Donner tous les sous-espaces de  $\mathbb{K}[X]$  stables par  $D$ .

**III.B** – On considère un endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

**III.B.1)** Déterminer l'ensemble des vecteurs  $u$  de  $E$  tels que la famille  $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$  soit une base de  $E$ .

**III.B.2)** Dans le cas où  $\mathcal{B}_{f,u}$  est une base de  $E$ , quelle est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_{f,u}$  ?

**III.B.3)** Déterminer une base de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit  $A_{n-1}$ .

**III.B.4)** Donner tous les sous-espaces de  $E$  stables par  $f$ . Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux  $\ker(f^i)$  pour  $i$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

### IV Quatrième partie

Dans cette partie,  $n$  est un entier naturel non nul,  $M$  est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f$  est l'endomorphisme de  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par  $f(X) = MX$  pour tout  $X$  de  $E$ .

**IV.A** – Si on note  $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$  où  $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$  et  $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $E$ ,

quelle est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_n$  ?

**IV.B** – Montrer que si  $n$  est impair, alors  $f$  admet au moins une valeur propre réelle.

**IV.C** – Dans cette question,  $\lambda = \alpha + i\beta$ , avec  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , est une valeur propre non réelle de  $M$  et  $Z$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , non nul est tel que  $MZ = \lambda Z$ .

Si  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  on note  $\overline{M} = (m'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  avec  $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$  (conjugué du nombre complexe  $m_{i,j}$ ) pour tout

$(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  et si  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  on note  $\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$  avec  $z'_i = \overline{z_i}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On pose  $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$  et  $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$ .

**IV.C.1)** Vérifier que  $X$  et  $Y$  sont dans  $E$  et montrer que la famille  $(X, Y)$  est libre dans  $E$ .

**IV.C.2)** Montrer que le plan vectoriel  $F$  engendré par  $X$  et  $Y$  est stable par  $f$  et donner la matrice de  $f_F$  dans la base  $(X, Y)$ .

**IV.D** – Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

**IV.E** – Existe-t-il un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  n'admettant ni droite ni plan stable ?

**IV.F** – Dans cette question on considère le système différentiel linéaire  $\mathcal{S} : X' = AX$  associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trajectoires de  $\mathcal{S}$*  les arcs de l'espace  $\mathbb{R}^3$  paramétrés par les solutions de  $\mathcal{S}$ . On veut déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes de  $\mathcal{S}$ .

**IV.F.1)** Construire une matrice  $P$  inversible et une matrice  $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$  avec  $(\alpha, \beta, \gamma)$  dans  $(\mathbb{R}^*)^3$  telles

que  $P^{-1}AP = T$  et déterminer un plan  $F$  et une droite  $G$  stables par l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$  et supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

**IV.F.2)** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy  $\mathcal{P}_U : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$  lorsque  $U$  appartient à  $G$ .

**IV.F.3)** Pour tout  $\sigma = (a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on considère le problème de Cauchy  $\mathcal{C}_\sigma : \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ x(0) = a, y(0) = b \end{cases}$  et

$\varphi = (x, y)$  dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  l'unique solution de  $\mathcal{C}_\sigma$ .

Préciser  $x'(0)$  et  $y'(0)$ ; montrer que  $x$  et  $y$  sont solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants et ainsi en déduire  $\varphi$  en fonction de  $a$  et de  $b$ .

**IV.F.4)** Déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes du système différentiel  $X' = AX$ .

## V Cinquième partie

Dans cette partie  $E$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

On considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  et on note  $A$  sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .

**V.A** –

**V.A.1)** Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur  $E$  pour lequel  $\mathcal{B}$  est orthonormée.

Ce produit scalaire est noté de manière usuelle par  $\langle u, v \rangle$  ou plus simplement  $u \cdot v$  pour tout  $(u, v)$  de  $E^2$ .

**V.A.2)** Si  $u$  et  $v$  sont représentés par les matrices colonnes respectives  $U$  et  $V$  dans la base  $\mathcal{B}$ , quelle relation simple existe-t-il entre  $u \cdot v$  et le produit matriciel  ${}^tUV$  (où  ${}^tU$  est la transposée de  $U$ ) ?

**V.B** – Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $D$  son supplémentaire orthogonal.

Si  $(u)$  est une base de  $D$  et si  $U$  est la matrice colonne de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , montrer que  $H$  est stable par  $f$  si et seulement si  $U$  est un vecteur propre de la transposée de  $A$ .

**V.C** – Déterminer ainsi le(s) plan(s) stable(s) de  $f$  lorsque  $n = 3$  et  $A$  est la matrice considérée en IV.F.

**V.D** – Dans cette question,  $E$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

**V.D.1)** Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors il existe  $n$  hyperplans de  $E$ ,  $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ , tous stables par  $f$  tels que  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ .

**V.D.2)** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  pour lequel il existe  $n$  hyperplans de  $E$  stables par  $f$  et d'intersection réduite au vecteur nul est-il nécessairement diagonalisable ?

---

• • • FIN • • •

---