ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Somme de projecteurs orthogonaux

Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme de X.

Si $\mathscr{B}$ est une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(\mathrm{T})$ le noyau de T et $R(\mathrm{T})$ l'image de T, $\operatorname{rg}\mathrm{T}$ le rang de T et $\sigma(\mathrm{T})$ le spectre de T.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Trace

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr}\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Question 1 *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, montrer que* $\operatorname{tr}\mathbb{A}\mathbb{B} = \operatorname{tr}\mathbb{B}\mathbb{A}$.

Question 2 *Soit T un endomorphisme de X, montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathscr{B}$.*

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr}\mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

2 Projecteurs

Question 3 *Soit P un projecteur de X, démontrer que $X = N(\mathrm{P}) \oplus R(\mathrm{P})$.*

Question 4 *En déduire que* $\operatorname{rg}\mathrm{P} = \operatorname{tr}\mathrm{P}$.

Question 5 *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

Question 6 *Soit S un endomorphisme de X. Montrer que si S est une somme finie de projecteurs P_i, $i = 1, \ldots, m$, alors $\operatorname{tr}\mathrm{S} \in \mathbf{N}$ et $\operatorname{tr}\mathrm{S} \geq \operatorname{rg}\mathrm{S}$.*

3 Décomposition en somme de projecteurs orthogonaux

On considère maintenant le cas où X est un espace (pré)hilbertien. On dit que T est **symétrique positif** s'il est **symétrique** et si

$$(\mathrm{T}x\,|\,x) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Question 7 *Montrer que* T*, supposé symétrique, est positif si et seulement si* $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}_+$.

Question 8 *Montrer qu'un projecteur* P *est un projecteur orthogonal si et seulement si il vérifie*

$$\left(x - \mathrm{P}x \,\middle|\, y\right) = 0,\ \forall x \in X,\ \forall y \in R(\mathrm{P}).$$

Question 9 *Montrer qu'un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique ; montrer également qu'un projecteur orthogonal est positif.*

On suppose désormais que T **est symétrique positif et vérifie** $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$.

On note r le nombre de valeurs propres strictement positives de T, comptées avec leur multiplicité. On note e_i les vecteurs d'une base propre $\mathscr{B}$ de T orthonormée, ordonnés de telle façon que les valeurs propres associées soient strictement positives si et seulement si $i \leq r$. On note Y l'espace engendré par les e_i, $i = 1, \ldots, r$ et Z celui engendré par les e_i, $i = r+1, \ldots, n$.

Question 10 *Montrer que* $Y = R(\mathrm{T})$, $Z = N(\mathrm{T})$, *ainsi que* $\mathrm{rg}\,\mathrm{T} = r$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, on note Q_i l'endomorphisme de X défini par

$$\mathrm{Q}_i\left(e_j\right) = \delta_{ij} e_i,\ j = 1, \ldots, n$$

Question 11 *Montrer que* Q_i *est un projecteur orthogonal de rang* 1.

Question 12 *On se place dans le cas particulier où* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} > \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Montrer qu'on peut choisir* i *tel que* $\mathrm{T}-\mathrm{Q}_i$ *soit symétrique positif et vérifie* $\mathrm{rg}\left(\mathrm{T}-\mathrm{Q}_i\right) = \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Quelle est la valeur de* $\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}-\mathrm{Q}_i\right)$?

Question 13 *On se place maintenant dans le cas général où* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Déduire de la question* **12** *qu'il existe* S *symétrique positif tel que* Y *soit stable par* S, $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} = \mathrm{rg}\,\mathrm{S} = \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$ *et que* $\mathrm{T}-\mathrm{S}$ *soit la somme de* $k = \mathrm{tr}\,\mathrm{T} - r$ *projecteurs orthogonaux de rang* 1.

On note μ_i, $i = 1, \ldots, r$ les valeurs propres strictement positives de S.

Question 14 *Montrer que* $\mathrm{S}_{|Y}$ *est inversible.*

On pose $\mathrm{U} = \mathrm{S}_{|Y}$ et pour x et $y \in Y$, $\xi(x, y) = \left(\mathrm{U}^{-1}x \,\middle|\, y\right)$. On note ε_i, $i = 1, \ldots, r$ une base de vecteurs propres de U associés aux valeurs propres μ_i.

Question 15 *Démontrer que* ξ *constitue un produit scalaire sur* Y.

Question 16 *Déterminer* $w \in Y$, *tel que* $\|w\| = 1$ *et* $\xi(w, w) = 1$. *On pourra, si nécessaire, chercher* w *dans le sous-espace de dimension* 2 *engendré par deux vecteurs propres* ε_i *et* ε_j *bien choisis.*

Question 17 *Montrer que* P *est un projecteur orthogonal de rang* 1 *sur* X *si et seulement si il existe un vecteur* z *unitaire dans* X, *tel que pour tout* $x \in X$, $\mathrm{P}(x) = (x|z)z$.

On considère maintenant un w tel que défini à la question **16** et l'endomorphisme P_w défini sur X par la formule suivante :

$$\mathrm{P}_w(x) = (x|w)w.$$

Question 18 *Démontrer que* $\mathrm{S} - \mathrm{P}_w$ *est symétrique et positif.*

Question 19 *Démontrer que* $N(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w) = N(\mathrm{S}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{U}^{-1}w)$, *où* $\mathrm{Vect}(\mathrm{U}^{-1}w)$ *note l'ensemble des vecteurs colinéaires à* $U^{-1}w$. *En déduire que* $\mathrm{rg}(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w) = \mathrm{rg}(\mathrm{S}) - 1$.

Question 20 *Déduire des questions* **17 18** *et* **19** *que* S *est la somme d'un nombre fini de projecteurs orthogonaux de rang* 1.

Question 21 *En déduire qu'un endomorphisme symétrique positif* T *est une somme finie de projecteurs orthogonaux si et seulement si* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$.

Fin de l'épreuve