Mathématiques 2

PSI

2014

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Notations

Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on note :
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels
- $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $O(n)$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $SO(n)$ le groupe spécial orthogonal, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(n)$ formé des matrices dont le déterminant est égal à 1
- Δ_{p+1} la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par blocs de la façon suivante :
$$\Delta_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & -I_p \end{pmatrix}$$
- $O(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ telles que :
$${}^tL\Delta_{p+1}L = \Delta_{p+1}$$
où ${}^tL$ désigne la transposée de la matrice L
- $O^+(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $O(1,p)$ dont le déterminant est égal à 1
- $O^-(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $O(1,p)$ dont le déterminant est égal à -1
- $\tilde{O}(1,p)$ l'ensemble des matrices $L = \left(\ell_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$ de $O(1,p)$ telles que $\ell_{1,1} > 0$.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'ensemble $O(1,p)$ pour p entier naturel non nul et en particulier pour $p \in \{1,3\}$. Dans le cas où p est égal à 3, l'ensemble $O(1,p)$ est appelé *groupe de Lorentz*. Il joue un rôle fondamental en mécanique quantique.

I Étude du groupe orthogonal généralisé $O(1,p)$

Dans cette partie on fixe p entier naturel non nul.

I.A – Structure de $O(1,p)$

I.A.1) La matrice Δ_{p+1} appartient-elle à l'ensemble $O(1,p)$? à l'ensemble $O^+(1,p)$?

I.A.2) Montrer que $O(1,p) = O^+(1,p) \cup O^-(1,p)$.

I.A.3) Montrer que l'ensemble $O(1,p)$ est un sous-groupe de $GL_{p+1}(\mathbb{R})$ et que $O^+(1,p)$ est un sous-groupe de $O(1,p)$.

I.A.4) Montrer que, pour toute matrice L élément de $O(1,p)$, sa transposée ${}^tL$ est aussi élément de $O(1,p)$.

I.A.5) Montrer que les parties $O(1,p)$, $O^+(1,p)$ et $O^-(1,p)$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ sont fermées.

I.B – Endomorphismes préservant une forme quadratique

Soient v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^{p+1}$. On note V et V' les matrices colonnes, éléments de $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{R})$, des vecteurs v et v' dans la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$.

On définit
$$\varphi_{p+1}(v,v') = {}^tV\Delta_{p+1}V' = v_1v_1' - \sum_{i=2}^{p+1} v_iv_i'$$
et
$$q_{p+1}(v) = \varphi_{p+1}(v,v)$$
On notera que φ_{p+1} est une forme bilinéaire symétrique et q_{p+1} la forme quadratique associée.

I.B.1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si, pour tous X et Y de $\mathbb{R}^n$, ${}^tXAY = {}^tXBY$ alors $A = B$.

I.B.2) Exprimer $\varphi_{p+1}(v,v')$ en fonction de $q_{p+1}(v+v')$ et $q_{p+1}(v-v')$.

I.B.3) Soient $L \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{p+1}$ canoniquement associé.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. $L \in O(1,p)$;

ii. $\forall (v,v') \in \left(\mathbb{R}^{p+1}\right)^2$, $\varphi_{p+1}\left(f(v),f(v')\right) = \varphi_{p+1}\left(v,v'\right)$;

iii. $\forall v \in \mathbb{R}^{p+1}$, $q_{p+1}\left(f(v)\right) = q_{p+1}\left(v\right)$.

I.B.4) Si $L = \left(l_{i,j}\right)_{i,j} \in O(1,p)$, $v = (1,0,...,0)$ et $v' = (0,1,0,...,0)$, donner les équations sur les $l_{i,j}$ correspondant à

$$\varphi_{p+1}(f(v),f(v')) = \varphi_{p+1}(v,v'), \quad q_{p+1}(f(v)) = q_{p+1}(v) \quad \text{et} \quad q_{p+1}(f(v')) = q_{p+1}(v')$$

Qu'obtient-on similairement avec ${}^tL$?

II Propriétés algébriques et géométriques du groupe $O^+(1,1)$

***II.A* – *Structure de* $O^+(1,1)$**

II.A.1) Soient a et b deux réels. Si $a > 0$ et $a^2 - b^2 = 1$ montrer qu'il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \operatorname{ch}\theta$ et $b = \operatorname{sh}\theta$.

II.A.2) Soient a, b, c et d quatre réels. On considère la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Écrire les équations sur a, b, c, d traduisant l'appartenance de L à $O(1,1)$.

II.A.3) En déduire l'égalité :

$$O^+(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & -\operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

On note, dans la suite de cette partie II, pour tout réel γ, $L(\gamma) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix}$.

II.A.4) Montrer, pour tous réels γ et γ', l'égalité :

$$L(\gamma)L(\gamma') = L(\gamma+\gamma')$$

En déduire que $O^+(1,1) \cap \tilde{O}(1,1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $O^+(1,1)$.

II.B – Le groupe $O^+(1,1) \cap \tilde{O}(1,1)$ est-il compact ?

II.C – Montrer que les matrices éléments de $O^+(1,1)$ sont diagonalisables et trouver une matrice $P \in O(2)$ telle que, pour toute matrice $L \in O^+(1,1)$, la matrice ${}^tPLP$ soit diagonale.

II.D – Montrer que le groupe $O^+(1,1)$ est commutatif.

III « Décomposition standard » d'un élément du groupe de Lorentz $O(1,3)$

III.A – Soit $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in O(1,3)$. Montrer l'inégalité $\ell_{1,1}^2 \geqslant 1$.

III.B – Soient $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ et $L' = (\ell'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ deux éléments de $\tilde{O}(1,3)$. On pose $L'' = LL' = (\ell''_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$.

Démontrer les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \sqrt{\sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}^2}\sqrt{\sum_{k=2}^{4} \ell'^2_{k,1}} + \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} < \ell''_{1,1}$$

En déduire que l'ensemble $\tilde{O}(1,3)$ est un sous-groupe du groupe de Lorentz $O(1,3)$.

On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}, R \in SO(3) \right\}$$

III.C – Justifier que G est un sous-groupe de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ isomorphe à $SO(3)$.

Soient $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ et $a = \begin{pmatrix} \ell_{2,1} \\ \ell_{3,1} \\ \ell_{4,1} \end{pmatrix}$.

III.D – Montrer que, si le vecteur a est nul, alors la matrice L appartient au groupe G.

III.E – Construction d'une rotation particulière

III.E.1) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, montrer que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ de même norme, il existe une rotation r telle que $r(u) = v$.

III.E.2) Écrire, en langage Maple ou Mathematica, une fonction (ou procédure) `rotation`, de paramètres U et V, renvoyant :
- `False` si U et V n'ont pas la même norme ;
- une matrice R de $SO(3)$ telle que $RU = V$ si U et V ont même norme.

III.F – On suppose dans cette question que le vecteur a est non nul.

III.F.1) Déduire de la question III.E.1 qu'il existe un élément L_1 de G tel que l'on a :

$$L_1 L = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \ell_{1,4} \\ \alpha & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$$

où α est un réel strictement positif que l'on précisera, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.

On fixe désormais de tels coefficients α, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1,ν_2 et ν_3.

III.F.2) Soient $v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$. Montrer que v_2 et v_3 sont deux vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle.

III.F.3) Soit $R_2 \in SO(3)$. On pose $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R_2 \end{pmatrix} \in G$. Montrer que l'on peut choisir R_2 tel que

$$L_1 L L_2 = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où β_1, β_2, β_3, δ_1, δ_2 et δ_3 sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.

III.F.4) Montrer que les réels β_2, β_3, δ_2 et δ_3 sont nuls.

III.G – En déduire que toute matrice L de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit du type

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R' \end{pmatrix}$$

où R et R' sont deux éléments de $SO(3)$ et γ est un réel.

III.H – Écrire, en langage Maple ou Mathematica, une fonction ou une procédure permettant d'obtenir une telle décomposition d'une matrice de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$.

On pourra utiliser la fonction `rotation` écrite précédemment.

III.I – La décomposition obtenue est-elle unique ?

• • • FIN • • •