

File d'attente M/GI/1

CCMP

Epreuve 0 de probabilités

On considère la file d'attente à une caisse de supermarché. Il y a un serveur et un nombre de places infini. Les clients sont servis selon la discipline « premier arrivé, premier servi ». On appelle « système », l'ensemble des clients en attente et du client en service. On considère $(A_n, n \geq 1)$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} où A_n représente le nombre de clients arrivés pendant le service du client n .

On définit la suite $(X_n, n \geq 1)$ comme suit

$$X_0 = 0 \text{ et } X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \text{si } X_n = 0, \\ X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0. \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que les variables aléatoires $(A_n, n \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi, de loi commune celle d'une variable aléatoire A .

Hypothèse : On suppose que

- A est à valeurs entières,
- $\mathbf{P}(A \geq n) > 0$ pour tout entier n ,
- A a une espérance finie, on note $\rho = \mathbf{E}[A]$.

1 Fonction caractéristique

Dans cette section X représente une variable aléatoire quelconque à valeurs dans \mathbf{N} . On définit sa fonction caractéristique ϕ_X par

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \mathbf{E}[e^{itX}]. \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ_X est continue sur \mathbf{R} et périodique.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que X et Y ont même loi.

Indication : on pourra considérer les intégrales

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt} dt.$$

pour tout entier k .

3. Si $\mathbf{E}[X] < +\infty$, montrer que ϕ_X est dérivable sur \mathbf{R} et calculer $\phi'_X(0)$.
4. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Z = Y + 1$ où Y est de loi géométrique de paramètre p .

2 Remarques préliminaires

5. Etablir que X_n représente le nombre de clients dans le système au moment du départ du client n .
6. Existe-il $M > 0$ tel que $\mathbf{P}(X_n \leq M) = 1$ pour tout $n \geq 0$?
7. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $X_{n+1} - X_n \geq -1$.
8. Pour tout $n \geq 0$, montrer que les variables aléatoires X_n et A_{n+1} sont indépendantes.

3 Convergence

9. Etablir l'identité suivant pour X une variable aléatoire à valeurs entières :

$$\mathbf{E} [e^{itX} \mathbf{1}_{\{X>0\}}] = \phi_X(t) - \mathbf{P}(X = 0)$$

10. Pour tout entier n , établir la relation suivante :

$$\phi_{X_{n+1}}(t) = \phi_A(t) [e^{-it} \phi_{X_n}(t) + (1 - e^{-it}) \mathbf{P}(X_n = 0)].$$

On suppose dorénavant que $0 < \rho < 1$.

On admet qu'alors la suite $(\mathbf{P}(X_n = 0), n \geq 1)$ converge vers une limite, notée α .

On suppose que A n'est pas arithmétique, c'est-à-dire que $|\phi_A(t)| < 1$ pour $t \notin \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

On pose

$$\begin{aligned} \theta &: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbf{C} \\ 0 &\longmapsto 1 \\ t &\longmapsto \alpha \frac{\phi_A(t)(1 - e^{-it})}{1 - \phi_A(t)e^{-it}} \text{ pour } t \neq 0. \end{aligned}$$

11. Etablir le développement limité à l'ordre 1, de ϕ_A au voisinage de 0.
12. Que doit valoir α pour que θ soit continue en 0 ?
13. On fixe $\epsilon > 0$. Pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, identifier $\beta_t \in]0, 1[$ tel que pour tout entier n suffisamment grand, on ait l'identité suivante :

$$|\phi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)| \leq \beta_t |\phi_{X_n}(t) - \theta(t)| + \epsilon.$$

14. Montrer que la suite de fonctions $(\phi_{X_n}, n \geq 1)$ converge simplement vers θ .

4 Application

On suppose que

$$\phi_A(t) = \frac{1}{1 + \rho - \rho e^{it}}.$$

15. Identifier la loi de A .
16. Montrer que ϕ_A satisfait les hypothèses requises.
17. Calculer θ et identifier la loi de Y .