

SESSION 2014

PCM2006

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES**

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse à des opérateurs définis sur l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques, en introduisant sur cet espace une loi dite produit de convolution.

Partie I : ETUDE D'UN PREMIER OPERATEUR

I.1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|.$$

I.1.a Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$.

I.1.b L'application φ est-elle continue sur \mathbb{R} ? De classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ? De classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} ? On justifiera brièvement les réponses.

I.2. Série de Fourier de φ .

I.2.a Déterminer les coefficients de Fourier (dits exponentiels) de φ : $c_n(\varphi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Préciser la convergence de la série de Fourier de φ .

I.2.b Justifier la convergence et calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.

Dans la suite de cette partie, ainsi que dans la partie suivante, on considère E l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui sont continues sur \mathbb{R} et 2π -périodiques.

I.3. Soient $h \in E$ et $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $s \in \mathbb{R}$ par $H(s) = \int_s^{s+2\pi} h(t) dt$.

Justifier que H est une application constante sur \mathbb{R} .

I.4. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \right| f(t) dt.$$

I.4.a Montrer que g est définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique.

I.4.b Montrer que g est continue sur \mathbb{R} .

I.4.c Justifier que l'application Φ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E .

I.5. Soient $f \in E$ et $g = \Phi(f)$.

I.5.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \int_{x-2\pi}^x \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) f(t) dt$.

En déduire que l'on peut écrire : $g(x) = \sin \left(\frac{x}{2} \right) F(x) - \cos \left(\frac{x}{2} \right) G(x)$

où l'on a posé : $F(x) = \int_{x-2\pi}^x \cos \left(\frac{t}{2} \right) f(t) dt$ et $G(x) = \int_{x-2\pi}^x \sin \left(\frac{t}{2} \right) f(t) dt$.

I.5.b En déduire que g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , avec : $g'' + \frac{g}{4} = f$.

I.5.c Soit $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant g'' , déterminer le coefficient de Fourier $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$. Grâce au calcul de I.2.a, donner une relation entre $c_n(g)$, $c_n(f)$ et $c_n(\varphi)$.

I.6. Isomorphisme.

I.6.a Soient $f \in E$, f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $g = \Phi(f)$. Montrer que $g' = \Phi(f')$.

I.6.b Soit $h \in E$, h étant supposée de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

En utilisant $g = \Phi(h)$, montrer que : $\Phi \left(h'' + \frac{h}{4} \right) = h$.

I.6.c Montrer que Φ établit un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre E et son sous-espace noté E_2 constitué des applications de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} (et 2π -périodiques).

I.7. Exemples de résolution.

I.7.a Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = -\frac{4}{3}f$; pour cela, on justifiera que $f \in E_2$ et que f est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on résoudra.

I.7.b Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.

Partie II : ETUDE D'UN DEUXIEME OPERATEUR

Soit $r \in]0, 1[$ fixé.

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt).$$

II.1.a Montrer la convergence normale sur \mathbb{R} de la série de fonctions de terme général p_n .

II.1.b Pour tout réel t , on pose alors $P(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

En remarquant que $2 \cos(nt) = e^{-int} + e^{int}$, justifier l'égalité $P(t) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$.

II.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique.

II.2.a Justifier que f est bornée sur \mathbb{R} .

II.2.b Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t) dt$.

On note aussi $g_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = c_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)f(t)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)f(t)dt, \quad g_n(x) = r^n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Justifier alors l'égalité : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

II.2.c Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} : pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe \mathcal{C}^1 d'une fonction somme d'une série de fonctions.

II.2.d g étant 2π -périodique, on veut calculer ses coefficients de Fourier. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $c_p(g) = r^{|p|} c_p(f)$, où $c_p(g)$ et $c_p(f)$ désignent les coefficients de Fourier (exponentiels) de f et g respectivement. Pour cela, on justifiera d'abord l'intégration terme-à-terme dans l'intégrale définissant $c_p(g)$.

II.3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , continues sur \mathbb{R} et qui sont 2π -périodiques. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t) dt.$$

En procédant comme dans la question I.4, on montre que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E , ce que l'on admettra sans avoir à en faire la démonstration.

II.3.a Grâce à II.2.d, déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in E$ non nulle, vérifiant $\Pi(f) = \lambda f$.

II.3.b L'endomorphisme $\Pi : E \rightarrow E$ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Partie III : PRODUIT DE CONVOLUTION, OPERATEURS ASSOCIES

On considère ici l'espace vectoriel complexe noté $\mathcal{C}_{2\pi}$ des applications continues de \mathbb{R} vers \mathbb{C} , qui sont 2π -périodiques.

On rappelle que l'on définit sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$ et la norme associée notée ici $\|\cdot\|_2$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

Par ailleurs, on considère la norme usuelle $\|\cdot\|_{\infty}$, définie aussi sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

III.1. Pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit $h = f * g$ (dit produit de convolution de f et g), par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que h ainsi définie est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.2. Pour la suite de cette partie, on admettra sans démonstration la relation entre les coefficients de Fourier de $f * g$ et ceux de f et g :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$$

III.2.a Montrer que pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a : $f * g = g * f$.

III.2.b Montrer qu'il ne peut pas exister $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on ait : $f * \varepsilon = f$.

III.3. Soit ψ donnée dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

A toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on associe $\Theta(f) = \psi * f$.

III.3.a Montrer que l'application Θ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.3.b Montrer que $S_{\psi} = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, que $M = \sup\{|c_n(\psi)|, n \in \mathbb{Z}\}$ existe et vérifie $M \leq \|\psi\|_{\infty}$.

III.3.c Justifier que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|\Theta(f)\|_2 \leq M\|f\|_2.$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.d Montrer que S_{ψ} est exactement l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe f non nulle dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, vérifiant $\Theta(f) = \lambda f$.

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.e Caractériser à l'aide de S_{ψ} l'injectivité de Θ .

Fin de l'énoncé