CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel n on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Objectifs :

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée ψ) définie par une intégrale. Dans la **partie I**, on étudie une fonction f et l'on propose un procédé de calcul de la limite de f en $+\infty$. La **partie II** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées h et φ) qui seront utilisées dans la **partie III**.

Partie I

Etude d'une fonction et de sa limite

I.1 Etude de la fonction f

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\, dt = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

I.1.1 Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

I.1.2 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \exp(-x^2)\ .$$

I.1.3 Que peut-on dire de la parité de p_n?

I.1.4 Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

I.2 Développement en série de f

I.2.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

I.2.2 Expliciter $p_n(0)$.

I.3 Calcul de Δ

Pour tout entier n, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx.$$

I.3.1 Montrer que pour tout réel u, on a $e^u \geq 1 + u$.

I.3.2 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leq e^{-nu} & \text{si} \quad u \leq 1 \\ e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1 \end{cases}$$

I.3.3 Démontrer que pour tout entier n non nul, on a :

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \, dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

I.3.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, calculer Δ.

Partie II

Etude de deux fonctions

II.1 Etude de la fonction h

II.1.1 Justifier l'existence, pour tout réel b, de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt) \exp(-t^2) \, dt.$$

On note ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x,y) = e^{-(x^2-y^2)} \left(\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy\right).$$

II.1.2 La forme différentielle ω est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$?

II.1.3 Etant donnés deux réels strictement positifs a et b, on note P le pavé de $\mathbb{R}^2$ défini par : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note γ le bord de P orienté dans le sens trigonométrique. Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \omega$?

II.1.4 En évaluant l'intégrale curviligne de ω le long des segments qui forment γ, déterminer $h(b)$ en fonction de b et Δ.

II.2 Etude de la fonction φ

II.2.1 Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

II.2.2 Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II.2.3 Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

II.2.4 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie III

Calcul d'une intégrale

III.1 Etude de la fonction ψ

III.1.1 Vérifier que l'on définit une fonction ψ, continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2}\, dt.$$

III.1.2 Calculer $\psi(0)$.

III.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp\left(-\left(1+x^2\right)y^2\right)\, dy.$$

Montrer que $(j_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa limite.

III.3 Désormais, a désigne un réel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k_n fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y \exp\left(-y^2x^2\right)\cos(2ax)\, dx.$$

Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Expliciter sa limite.

III.4 Soit $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1 Justifier l'existence de $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

III.4.2 Montrer que $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^p k_n(y)\exp\left(-y^2\right)\, dy.$

III.5 Justifier l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y)\exp\left(-y^2\right)$.

III.6 Calculer $\psi(x)$.

Fin de l'énoncé