

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2013

FILIÈRE **PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

* * *

Dans ce problème, $n \geq 2$ est un entier et \mathbf{M}_n désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. La transposée d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n$ est notée tA . Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques est noté \mathbf{S}_n . Enfin, le groupe orthogonal est noté \mathbf{O}_n . On utilisera la notation de Kronecker

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On munit l'espace \mathbf{M}_n de la norme euclidienne

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2}$$

où les a_{ij} sont les coefficients de A . On pourra utiliser la formule $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA)$.

Si $\theta \in \mathbb{R}$ et si $p < q$ sont des entiers entre 1 et n , on désigne par $R_{p,q}(\theta)$ la matrice $n \times n$ dont les coefficients r_{ij} sont donnés, pour $1 \leq i, j \leq n$, par

$$r_{ij} = \begin{cases} \delta_i^j & \text{si } j \neq p, q, \\ \delta_i^j & \text{si } i \neq p, q, \\ \cos \theta & \text{si } i = j = p \text{ ou } q, \\ \sin \theta & \text{si } i = q \text{ et } j = p, \\ -\sin \theta & \text{si } i = p \text{ et } j = q. \end{cases}$$

Par exemple,

$$R_{1,2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & & & & \\ \sin \theta & \cos \theta & & & & \\ & & O_{2 \times (n-2)} & & & \\ & & & I_{n-2} & & \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Soit $(A^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de matrices dans \mathbf{M}_n . On dit que $A^{(m)}$ converge vers A si $A \in \mathbf{M}_n$ et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A^{(m)} - A\| = 0.$$

Il revient au même de dire que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, la suite des coefficients $a_{ij}^{(m)}$ de $A^{(m)}$ converge vers a_{ij} , le coefficient de A correspondant.

1 Préliminaires

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de $R_{p,q}(\theta)$?
2. Calculer le produit ${}^t(R_{p,q}(\theta))R_{p,q}(\theta)$. Quelle propriété de $R_{p,q}(\theta)$ reconnaît-on ?
3. On se donne $S \in \mathbf{S}_n$ et $R \in \mathbf{O}_n$. Vérifier que tRSR est symétrique et qu'elle est semblable à S .
4. Soit $A \in \mathbf{M}_n$ et $U, V \in \mathbf{O}_n$. Montrer que $\|UAV\| = \|A\|$.
5. On se donne quatre nombres réels $a \leq b \leq c \leq d$ tels que $a + d = b + c$. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto |x-a| - |x-b| - |x-c| + |x-d|$; montrer qu'elle est à valeurs positives. *Un raisonnement étayé par une représentation graphique sera le bienvenu.*

2 Conjugaison par une matrice de rotation

On se donne une matrice $S \in \mathbf{S}_n$, un angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et des entiers $1 \leq p < q \leq n$ tels que $s_{pq} \neq 0$. On définit $S' = {}^tR_{p,q}(\theta)SR_{p,q}(\theta)$ et on note s'_{ij} ses coefficients.

6. Montrer que $s'_{qq} + s'_{pp} = s_{qq} + s_{pp}$.
7. Exprimer les coefficients s'_{ij} de S' en fonction de ceux de S .
8. On cherche un angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour lequel on ait $s'_{pq} = 0$.
 - (a) Montrer que $s'_{pq} = 0$ si et seulement si $t = \tan \theta$ satisfait l'équation

$$(1) \quad t^2 + \frac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}} t - 1 = 0.$$

- (b) Montrer que cette équation admet une solution $t_0 \in]-1, 1]$ et une autre $t_1 \notin]-1, 1]$. Quelle est la relation entre les angles θ_0 et θ_1 qui correspondent à ces racines ?
- (c) Dans toute la suite, on choisit l'une des deux racines t de l'équation (1). On a donc $s'_{pq} = 0$. *Un choix plus précis sera fait à partir de la question 12.*
Vérifier que $s'_{pp} - s_{pp} = t s_{pq}$; établir une formule analogue pour $s'_{qq} - s_{qq}$.
- (d) On décompose S sous la forme $S = D + E$ avec D diagonale et E à diagonale nulle. On décompose de même $S' = D' + E'$. Calculer $\|E'\|^2$ en fonction de $\|E\|^2$ et de $(s_{pq})^2$.

- (e) En justifiant que $\|S'\| = \|S\|$, en déduire une expression de $\|D'\|^2$ au moyen de $\|D\|^2$ et de $(s_{pq})^2$.
9. Montrer que les coefficients de S' s'expriment uniquement en fonction de ceux de S et de la racine (t_0 ou t_1) qu'on a choisie.
10. On suppose dans cette question que s_{pq} est le coefficient de plus grande valeur absolue de E .
- (a) Montrer que $\|E'\| \leq \rho \|E\|$ où $\rho < 1$ est une constante que l'on explicitera.
- (b) Si on choisit la racine t_0 , montrer en outre que $\|D' - D\| \leq \|E\|$.
11. En calculant $(s'_{qq} - s'_{pp})^2 - (s_{qq} - s_{pp})^2$, montrer que

$$|s'_{qq} - s'_{pp}| \geq |s_{qq} - s_{pp}|.$$

12. **Dorénavant, et jusqu'à la fin du problème, on choisit la racine t_0 de (1) et donc l'angle θ_0 , mentionnés à la Question 8b.**

- (a) Montrer que $s_{pp} - s'_{pp}$ et $s'_{qq} - s_{qq}$ sont du même signe que $s_{qq} - s_{pp}$.
- (b) Si $1 \leq i \leq n$, montrer que

$$|s_{ii} - s'_{qq}| + |s_{ii} - s'_{pp}| - |s_{ii} - s_{pp}| - |s_{ii} - s_{qq}| \geq 0.$$

13. On définit

$$R = \sum_{i,j=1}^n |s_{jj} - s_{ii}| \quad \text{et} \quad R' = \sum_{i,j=1}^n |s'_{jj} - s'_{ii}|.$$

Montrer que

$$R' - R \geq 2(|s'_{qq} - s_{qq}| + |s'_{pp} - s_{pp}|) = 2 \sum_{i=1}^n |s'_{ii} - s_{ii}|.$$

3 Algorithme de Jacobi incomplet

Dans l'algorithme de Jacobi, on part d'une matrice $\Sigma \in \mathbf{S}_n$ et on construit une suite de matrices symétriques $\Sigma^{(m)}$, dont les coefficients sont notés $\sigma_{ij}^{(m)}$, de la façon suivante :

- On pose $\Sigma^{(0)} = \Sigma$.
- Lorsque $\Sigma^{(m)}$ est connue, on choisit un couple (p_m, q_m) avec $p_m < q_m$.
- On applique alors les calculs de la Partie 2 à la matrice $S = \Sigma^{(m)}$ et au couple $(p, q) = (p_m, q_m)$: on forme la matrice S' étudiée dans cette partie, et on l'appelle $\Sigma^{(m+1)}$.

À ce stade, on ne précise pas la manière de choisir (p_m, q_m) ; c'est pourquoi l'algorithme est dit *incomplet*.

14. On définit

$$R_m = \sum_{i,j=1}^n |\sigma_{jj}^{(m)} - \sigma_{ii}^{(m)}|, \quad \varepsilon_m = \sum_{i=1}^n |\sigma_{ii}^{(m+1)} - \sigma_{ii}^{(m)}|.$$

Vérifier que $R_{m+1} - R_m \geq 2\varepsilon_m$. En déduire que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ est convergente.

15. On décompose $\Sigma^{(m)}$ sous la forme $D^{(m)} + E^{(m)}$ où $D^{(m)}$ est diagonale et $E^{(m)}$ est à diagonale nulle. Montrer que la suite $(D^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera D sa limite.

4 Convergence et polynôme caractéristique

Soit $(A^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbf{M}_n . On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la matrice $A^{(m+1)}$ est semblable à $A^{(m)}$.

16. Montrer que $A^{(m)}$ est semblable à $A^{(0)}$.
17. On suppose de plus que cette suite converge vers une matrice diagonale D . Si P_m désigne le polynôme caractéristique de $A^{(m)}$, montrer que les coefficients de P_m convergent vers ceux du polynôme caractéristique de D quand $m \rightarrow +\infty$.
En déduire que le polynôme caractéristique de D est égal à celui de $A^{(0)}$.
18. Finalement, montrer que les termes diagonaux de D sont les valeurs propres de $A^{(0)}$. Que peut-on dire de leurs multiplicités ?

5 Algorithme de Jacobi ; version optimale

Dans la version optimale de l'algorithme de Jacobi, on choisit pour chaque m un couple (p_m, q_m) de sorte que la valeur absolue du coefficient $\sigma_{ij}^{(m)}$ soit maximale précisément quand $(i, j) = (p_m, q_m)$. Autrement dit,

$$\forall i < j, \quad |\sigma_{ij}^{(m)}| \leq |\sigma_{p_m q_m}^{(m)}|.$$

19. Montrer que pour $m \rightarrow +\infty$, la suite $(\Sigma^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale D .
20. Montrer alors que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de Σ .
21. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\|D - D^{(m)}\| \leq \frac{\rho^m}{1 - \rho} \|E^{(0)}\|.$$

22. En vous appuyant sur les réponses aux questions précédentes, donnez votre avis quant à la rapidité de la convergence des $d_{ii}^{(m)}$ vers les valeurs propres de Σ .

Les propriétés de la méthode de Jacobi sont aujourd'hui encore mal comprises. Dans sa version optimale, et sous l'hypothèse que les valeurs propres de Σ sont simples, elle converge au moins quadratiquement, et probablement encore plus vite. L'estimation de la question 21 est donc grossière. Elle est d'ailleurs satisfaite "en moyenne" lorsqu'on choisit (p_m, q_m) au hasard, ce qui entraîne la convergence "presque sûrement".

* *
*