Mathématiques 1

PSI

2012

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

- Dans le problème λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en **I.A**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

I Préliminaires, définition de la transformation L

I.A – Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E'?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$$

I.B – Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C – Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

II Exemples dans le cas de f positive

II.A – Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B – Dans les trois cas suivants, déterminer E.

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$, avec λ supposée de classe C^1.

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C – Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait $Lf(x) - (Lf)'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$.

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

III Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A – Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

On note encore f le prolongement obtenu.

III.B – Déterminer E.

III.C – À l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D – Est-ce que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A – Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$), alors Lf est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B – Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C – ***Comportement en l'infini***

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx}\, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers l'infini, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D – ***Comportement en 0***

On suppose ici que f admet une limite finie l en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers l en 0^+.

V Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A – Montrer que E ne contient pas 0.

V.B – Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C – Montrer que E' contient 0.

V.D – Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E – En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F – On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G – Que vaut $Lf(0)$?

VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A – Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\displaystyle\int_0^1 P(t)g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B – Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$.

On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geqslant 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x + a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na)=0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C – Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII Étude en la borne inférieure de E

VII.A – Cas positif

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B – Dans cette question, $f(t)=\cos t$ et $\lambda(t)=\ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E et la déterminer.

VIII Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliquée à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A – Soient P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P, converge.

VIII.B – On note pour tout couple $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$,

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$$

Vérifier que $\langle .,.\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C – On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(P)(t)=e^t D(te^{-t}P'(t))$$

Vérifier que U est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D – Montrer que pour tous P et Q de $\mathcal{P}$, on a

$$\langle U(P),Q\rangle = \langle P,U(Q)\rangle$$

VIII.E – Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F – Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G – Description des éléments propres de U

On considère sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n):\quad tP''+(1-t)P'+nP=0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t)=t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0,+\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1,+\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1,+\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t)=e^tD^n(e^{-t}t^n)$?

• • • FIN • • •