

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2012

FILIERE **PC**

COMPOSITION DE PHYSIQUE – B – (XELC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
 Pour les applications numériques, on se contentera de donner un unique chiffre significatif.

Étude de quelques phénomènes non linéaires dans les milieux diélectriques

Nous nous proposons d'étudier quelques comportements de milieux diélectriques soumis à un champ électrique intense. Dans ce contexte, un champ électrique est considéré comme intense lorsque son module atteint une certaine proportion du champ impliqué dans la cohésion du milieu. En première partie, nous établirons un modèle de polarisabilité électronique pour un milieu diélectrique homogène et isotrope (DHI), dans le cadre de la réponse linéaire. Une deuxième partie sera dédiée à l'étude du phénomène de doublement de fréquence (relativement à la fréquence de l'onde électromagnétique excitatrice). Dans une dernière partie, nous étudierons l'effet Kerr optique. Ces trois parties sont indépendantes mais il est conseillé, au moins, de lire attentivement la première partie.

Nous considérerons un milieu diélectrique comme un isolant idéal et donc ne comprenant aucune charge susceptible de se déplacer bien au delà d'une distance atomique. Lorsque les barycentres respectifs des charges positives et négatives d'une entité polarisable élémentaire (atome, molécules ou groupe d'atomes) du matériau diélectrique ne coïncident pas, il apparaît un dipole électrique \vec{p} . Nous ne considérerons que la polarisation induite par un champ électrique.

Données numériques, formulaire et notations.

Charge électrique élémentaire :	e	$= 1,60 \times 10^{-19}$	C
Masse de l'électron :	m_e	$= 9,11 \times 10^{-31}$	kg
Vitesse de la lumière dans le vide :	c	$= 3,00 \times 10^8$	m·s ⁻¹
Perméabilité magnétique du vide :	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}$	kg·m·C ⁻²
Permittivité diélectrique du vide :	ε_0	$= 8,85 \times 10^{-12}$	F·m ⁻¹
	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$	$= 2,31 \times 10^{-28}$	N·m ²

$$2(\cos x)^2 = 1 + \cos(2x)$$

$$2 \cos x \sin(2x) = \sin x + \sin(3x)$$

$$4(\cos x)^3 = 3 \cos x + \cos(3x)$$

$$\int_0^x \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{Argh}(x)$$

Nous désignons par \vec{P} le vecteur polarisation. Si l'élément de volume $\delta\tau$ contient δN_p entités polarisables, de moment dipolaire individuel \vec{p}_i , alors $\vec{P} = \frac{\delta N_p}{\delta\tau} \vec{p}_i \equiv N \vec{p}_i$ (N désignera toujours un nombre d'objets par unité de volume).

Partie I : Un modèle de susceptibilité électronique en réponse linéaire.

Nous nous intéressons ici à la polarisation qui résulte de la déformation du nuage électronique d'un atome par une onde électromagnétique. Nous considérons un milieu DHI contenant N électrons par unité de volume. Ce milieu est soumis à une onde électromagnétique, plane progressive harmonique, de pulsation ω et de nombre d'onde k , caractérisée par les champs :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y & ; \\ \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z & . \end{cases} \quad (1)$$

Les vecteurs unitaires \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z forment un trièdre direct. Sur le domaine de fréquence considéré, le milieu est supposé non absorbant.

Nous notons \vec{r} le vecteur déplacement du barycentre du nuage électronique, par rapport à celui du noyau (supposé fixe). En supposant un unique électron concerné, ce vecteur vérifie l'équation de la dynamique :

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_{EM} \quad . \quad (2)$$

\vec{F} et \vec{F}_{EM} représentent les forces que le nuage électronique subit de la part du noyau et de celle de l'onde électromagnétique. Tout effet dissipatif est négligé.

1. Caractérisation de la force d'interaction noyau–nuage \vec{F} .
Modélisons le nuage électronique, associé à l'électron ($m_e, -e$) dans son mouvement orbital, par une boule de rayon a et de densité volumique de charge uniforme. Pour $\|\vec{r}\| \ll a$, nous considérons que le nuage ne se déforme pas lors de son déplacement relatif.
 - a) Exprimer alors la force \vec{F} . L'écrire sous la forme $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$.
 - b) Exprimer ω_0^2 en fonction de e , ε_0 , a et m_e . Proposer un ordre de grandeur de a puis de ω_0 .
 - c) Exprimer le potentiel $W_2(r)$ duquel dérive \vec{F} .
 - d) Interpréter ω_0 dans le cadre de ce modèle.
2. Caractérisation de la force d'interaction onde–nuage \vec{F}_{EM} .
 - a) Rappeler les hypothèses qui président au calcul de cette force d'interaction, dans le cadre classique, et que nous adopterons.
 - b) Exprimer la force électromagnétique subie par le nuage.
3. Susceptibilité linéaire.
 - a) Exprimer le déplacement \vec{r} , solution de l'équation (2) pour le régime sinusoïdal forcé.
 - b) Exprimer le vecteur polarisation \vec{P} correspondant.

c) La susceptibilité χ_L (linéaire) est, ici, définie par la relation algébrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_L \vec{E} \quad . \quad (3)$$

Exprimer χ_L en fonction des grandeurs $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0}$ et $\chi_0 \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$. Esquisser et analyser son évolution en fonction de ω .

d) Estimer l'ordre de grandeur de χ_0 (on pourra, d'abord, l'exprimer en fonction de N et a).

Pour les matériaux entrant dans le cadre de cette modélisation, la permittivité relative statique est de l'ordre de quelques unités. Ceci corrobore-t-il le résultat obtenu ?

Définition du cadre d'étude pour les deuxième et troisième parties.

Dans les cristaux, il peut apparaître d'autres entités polarisables que celle formée simplement par un nuage électronique et son noyau. Pour ces entités, les distance, masse et charge caractéristiques peuvent s'écarter sensiblement de a , m_e et e . Nous les notons L , m et q . Nous supposons que ce sont ces entités qui sont à la base des phénomènes nous intéressant. Nous notons N leur nombre par unité de volume et redéfinissons ω_p^2 selon l'égalité $\omega_p^2 \equiv \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}$.

Le déplacement de la particule effective de charge q et de masse m , d'une entité, est noté \vec{r} . Nous limitons notre étude au cas tel que $\vec{r} = r \vec{u}_y$ et $\vec{E} = E(x, t) \vec{u}_y$, où $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$. Ce champ est considéré comme uniforme à l'échelle de $|r|$ et à celle de l'élément de volume $\delta\tau$.

Enfin, nous notons $W(r)$ le potentiel d'interaction entre les deux éléments interactifs d'une entité polarisable.

Partie II : Effet non linéaire d'ordre deux – Doublement de fréquence.

L'optique classique repose sur la linéarité de la réponse du milieu au champ électrique. Lorsque $\|\vec{E}\|$ atteint une certaine proportion du champ électrique intra-entité polarisable, propre au milieu, celui-ci ne répond plus linéairement. Le vecteur polarisation n'est alors plus une fonction linéaire du champ électrique. Nous aborderons cet effet en apportant des corrections au modèle de polarisation linéaire décrit précédemment et construit sur le potentiel d'interaction, harmonique, $W_2(r) \equiv \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$.

II.A Ordres de grandeur.

- Proposer un ordre de grandeur du champ électrique intra-atomique (noté E^*).
- Il apparaît que les effets non linéaires deviennent observables pour des champs électriques avoisinant $10^{-3} E^*$. Un laser (pulsé), de puissance 10 kW, focalisé sur une surface de $100 \mu\text{m}^2$ permettrait-il d'observer de tels effets ?

II.B Composantes de la polarisation.

Écrivons le développement $W_3(r)$ du potentiel $W(r)$, limité à l'ordre trois, sous la forme :

$$W_3(r) = W_2(r)\left(1 + \alpha \frac{r}{L}\right) \quad \text{où} \quad W_2(r) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 \quad (\text{soit } W(r) = W_3(r) + o(r^3)) \quad . \quad (4)$$

Le paramètre α est positif et inférieur à l'unité.

6. Un tel potentiel permettrait-il de modéliser l'interaction noyau-nuage pour le modèle adopté à la question (1), mais hors du domaine linéaire ?
7. Écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à la particule effective (m, q) , soumise à la force d'interaction et à l'action de l'onde électromagnétique (on la supposera placée en $x = 0$).
8. Nous recherchons une solution $r(t)$ de l'équation précédente sous la forme d'un développement en puissances de α , limité au premier ordre :

$$r(t) = a_1 \cos(\omega t) + \alpha \{a_0 + a_2 \cos(2\omega t)\} \quad . \quad (5)$$

- a) Écrire le PFD développé jusqu'au premier ordre par rapport à α (soit, α^1).
- b) En considérant successivement les termes d'ordre α^0 et α^1 , exprimer a_1 puis a_0 et a_2 .
- c) Au vu de la forme du potentiel, justifier le signe de a_0 .
- d) Exprimer la polarisation et l'écrire sous la forme :

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi_L E_0 \cos(\omega t) - \alpha \frac{3(\varepsilon_0 \chi_L E_0)^2}{4P^*} \{1 + H \cos(2\omega t)\} \quad . \quad (6)$$

Expliciter χ_L (fonction de ω), qui définit la susceptibilité linéaire du milieu, le coefficient P^* en fonction de N , L et q , et enfin H en fonction de ω et ω_0 .

- e) Esquisser l'allure de l'évolution de l'amplitude ($P_{2\omega}$) de la composante relative à la pulsation 2ω , de la polarisation P , en fonction de ω . Commenter ce tracé.
- f) MILLER (1963) écrivit $P_{2\omega}$ sous la forme :

$$P_{2\omega} = \left\{ \Delta \chi_L^2(\omega) \chi_L(2\omega) \right\} (\varepsilon_0 E_0)^2 \quad , \quad (7)$$

et il établit que le coefficient Δ variait assez peu d'un matériau à l'autre (utilisé dans ce domaine). Préciser l'intérêt pratique de cette propriété. Sans calcul, indiquer comment accéder à forme de la dépendance de Δ avec les données du problème. Proposer une relation plausible.

- g) Le milieu est traversé par le faisceau d'un laser (Nd-YAG) de longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm (proche infrarouge). Qu'attendons-nous à observer à sa sortie ?

II.C Intensité de l'onde de fréquence double.

Nous nous proposons de déterminer l'intensité de l'onde, de pulsation 2ω , à la sortie d'un cristal d'épaisseur b (selon la direction de propagation \vec{u}_x). L'apparition de cette onde n'est

sensible que si les vitesses de phase des ondes de pulsations ω et 2ω sont identiques (condition dite d'accord de phase). En pratique, cette condition peut être satisfaite en utilisant un cristal anisotrope. Nous supposons ici simplement $\chi_L(\omega) = \chi_L(2\omega)$ (ce qui n'est pas en accord avec le résultat de la question (3)).

Considérant maintenant l'ensemble des points du milieu, nous devons restituer la dépendance spatiale, omise à l'échelle de $\delta\tau$. La polarisation s'écrira alors $P(x, t) = P(\omega t - kx)$.

Pour un milieu polarisable et dans le contexte de notre étude, l'équation de propagation du champ électrique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} . \quad (8)$$

Une solution de l'équation (8), restreinte aux composantes harmoniques ω et 2ω , est recherchée sous la forme :

$$E(x, t) = E_1(x) \cos(\omega t - kx) + E_2(x) \sin\{2(\omega t - kx)\} , \quad (9)$$

avec une polarisation s'écrivant :

$$P(x, t) = \varepsilon_0 \chi_L E(x, t) + 2\varepsilon_0 D E^2(x, t) . \quad (10)$$

Sous l'hypothèse $\left| \frac{d^2 E_i}{dx^2} \right| \ll k^2 |E_i|$, les amplitudes E_1 et E_2 vérifient le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dx} = -K E_1 E_2 , \\ \frac{dE_2}{dx} = +K E_1^2 , \end{cases} \quad (11)$$

avec $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$ et où $K = \frac{\omega D}{c \sqrt{\varepsilon_r}}$ et $\varepsilon_r = 1 + \chi_L$.

9. Exprimer les composantes $R_1(x)$ et $R_2(x)$ des vecteurs de Poynting, moyennées sur la période du fondamental, pour chacune des deux ondes de pulsations ω et 2ω .
10. Établir que le système d'équations (11) est compatible avec la conservation de l'énergie électromagnétique.
Interpréter ce résultat dans le contexte de notre étude.
11. Déterminer l'équation différentielle dont la fonction E_2 est solution.
12. Exprimer $E_2(b)$ en fonction de $E_1(0) \equiv E_0$.
13. Exprimer le rapport $R_2(b)/R_1(0)$ et représenter son évolution en fonction de KbE_0 . Analyser ce résultat.
14. Calculer l'ordre de grandeur du rapport $R_2(b)/R_1(0)$ pour un cristal d'épaisseur $b = 0,5$ cm, éclairé par un laser (pulsé) de puissance 1 MW, de longueur d'onde de 1064 nm dans le vide, et de section de faisceau de 2 mm^2 .
Données : $\varepsilon_r \simeq 2,3$ et $D \simeq 5,0 \times 10^{-13} \text{ m}\cdot\text{V}^{-1}$.
15. En construisant une longueur caractéristique de variation de la fonction E_2 , vérifier que l'hypothèse associée au système d'équations (11) est satisfaite (pour les données précédentes).

Partie III : Effet non linéaire d'ordre trois – Effet Kerr optique.

Nous rappelons que le cadre de cette étude à été défini en préambule des parties **II** et **III**.

III.A Effet Kerr.

Les milieux susceptibles de présenter des effets non-linéaires d'ordre trois sont constitués d'entités polarisables centrosymétriques. Leur potentiel d'interaction $W(r)$ est donc pair. Écrivons le développement $W_4(r)$ du potentiel $W(r)$, limité à l'ordre quatre, sous la forme :

$$W_4(r) = W_2(r) \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right\} \quad \text{où} \quad W_2(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (\text{soit } W(r) = W_4(r) + o(r^4)) \quad . \quad (12)$$

Le paramètre α est positif et inférieur à l'unité.

16. Écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à la particule effective (m, q) , soumise à la force d'interaction et à l'action de l'onde électromagnétique (la particule est supposé placée en $x = 0$).
17. Recherchons des solutions $r(t)$ de l'équation précédente sous la forme d'un développement en puissances du paramètre α , limité au premier ordre :

$$r(t) = a_1 \cos(\omega t) + \alpha \{ b_1 \cos(\omega t) + b_3 \cos(3\omega t) \} \quad . \quad (13)$$

En s'inspirant de la démarche adoptée à la partie **II**, déterminer les expressions de a_1 puis de b_1 et b_3 .

18. Limitons-nous dès à présent au terme de pulsation ω de la réponse du milieu. Établir que la composante, de pulsation ω , de la polarisation s'exprime :

$$P_\omega(x, t) = \varepsilon_0 \chi_L (1 + \alpha \beta) E(x, t) \quad \text{où} \quad \beta = \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left\{ \frac{\varepsilon_0 \chi_L E_0}{NqL} \right\}^2 \quad . \quad (14)$$

Cette relation définit la susceptibilité $\chi \equiv \chi_L (1 + \alpha \beta)$ correspondante du milieu, ainsi que sa susceptibilité linéaire χ_L que l'on explicitera.

La dépendance $\chi = \chi(E_0^2)$ caractérise l'effet Kerr.

19. L'indice optique n est défini par l'égalité $n^2 = 1 + \chi$. En supposant, *a priori*, $|\alpha \beta| \ll 1$, exprimer l'écart relatif d'indice $\delta \equiv \frac{n - n_L}{n_L}$, où n_L représente l'indice du milieu en réponse linéaire.
20. Une onde plane, décrite par le champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$, traverse ce milieu. Justifier que δ est proportionnel à l'intensité de cette onde, moyennée sur sa période temporelle ($\delta = \Gamma I$).
21. Pour l'arséniure de gallium, dans l'infra-rouge, $\Gamma \approx 2 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$. Vérifier que, même pour un laser (pulsé) de très forte puissance dont l'intensité lumineuse I peut atteindre $10^9 \text{ W} \cdot \text{mm}^{-2}$, l'hypothèse adoptée à la question (19) reste satisfaite.

III.B Autofocalisation d'un faisceau lumineux.

Nous souhaitons rendre compte, par une approche très simplifiée, du phénomène d'autofocalisation d'un faisceau laser dans un milieu diélectrique. Un laser émet une onde monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda \approx 0,7 \mu\text{m}$, qui traverse le diélectrique selon \vec{u}_x . L'amplitude du champ électrique décroît du centre du faisceau vers l'extérieur. Pour modéliser grossièrement cette dépendance du champ selon une direction orthogonale à la direction de propagation \vec{u}_x , nous adoptons un champ électrique de la forme : $\vec{E} = E(z) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$, d'amplitude $E(z)$ s'écrivant :

$$\begin{cases} E(z) = E_0 & \text{pour } |z| \leq z_0 \quad (\text{où } z_0 \approx 10 \mu\text{m} \text{ et } E_0 \approx 10^9 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}) ; \\ E(z) = 0 & \text{pour } |z| > z_0 . \end{cases} \quad (15)$$

En accord avec la partie précédente, nous écrivons l'indice du milieu sous la forme :

$$n(z) = n_L \left(1 + \gamma \frac{E(z)^2}{2n_L^2} \right) , \quad \text{où } \gamma \approx 10^{-22} \text{ m}^2\cdot\text{V}^{-2} \text{ et } n_L \approx 1,5 . \quad (16)$$

22. En considérant que l'on peut faire l'analogie avec la diffraction par une fente, exprimer alors la divergence angulaire θ_d du faisceau, en fonction de λ , z_0 et accessoirement n_L (se reporter à la figure (1)). Estimer θ_d .

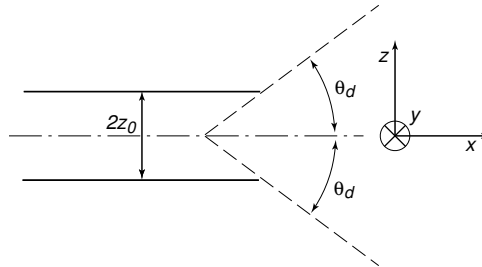


FIG. 1: Diffraction du faisceau.

23. Déterminer l'angle limite θ_ℓ au dessous duquel la réflexion des rayons, formant le faisceau, est totale (se reporter à la figure (2)).

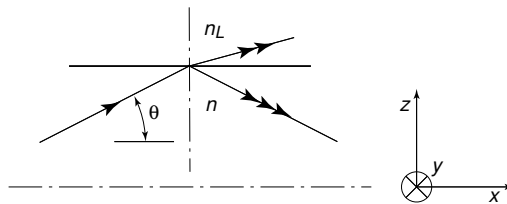


FIG. 2: Autofocalisation du faisceau – Rayon(s) réfléchi et/ou réfracté.

24. Déterminer la valeur critique E_c du champ pour laquelle la divergence du faisceau est contrebalancée par l'effet Kerr. Donner un ordre de grandeur de E_c .
25. Décrire les situations pour $E_0 > E_c$ et $E_0 < E_c$.

* *
*