EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'objectif du problème est de définir et d'étudier la notion de ***diagonalisabilité d'un couple de matrices*** (A, B) *dans plusieurs situations.*

Les parties I et V traitent chacune un cas particulier, respectivement en dimension 3 et 4. La partie II aborde le cas où B est inversible et la partie IV étudie un critère de diagonalisabilité. La partie III se réduit à l'étude du cas d'un couple de matrices symétriques réelles.

La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H une partie de $\mathbb{K}$.

Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques,
$\mathcal{D}_n(H)$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux dans H,
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles,
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales,
I_n la matrice identité d'ordre n.

Définitions 1 : Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• On note $E_\lambda(A,B)$ l'ensemble des matrices-colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = \lambda BX$.

• On dit que λ est **valeur propre** du couple (A,B) si $E_\lambda(A,B)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si $A - \lambda B$ n'est pas inversible.

• On note $\chi_{(A,B)}$ la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ et $\mathrm{Sp}(A,B)$ l'ensemble des valeurs propres du couple (A,B), c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$.

Dans le cas particulier où $B = I_n$, on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de A.
Ainsi, $E_\lambda(A, I_n)$ et $\chi_{(A,I_n)}$ sont notés plus simplement $E_\lambda(A)$ et χ_A.

Partie I : DIAGONALISABILITÉ DANS UN CAS PARTICULIER

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Montrer que B n'est pas inversible.

I.1.b. Montrer que A est inversible.

I.1.c. Vérifier que $C = A^{-1}B$.

I.2.

I.2.a. Montrer que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = -(2\lambda - 1)^2$.

I.2.b. En déduire $\mathrm{Sp}(A,B)$.

I.2.c. Déterminer une base de $E_{1/2}(A,B)$ et en déduire que $\dim E_{1/2}(A,B) = 2$.

I.3.

I.3.a. Calculer $\chi_{(B,A)}(\lambda)$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(B,A) = \{0,2\}$.

I.3.b. Établir les identités suivantes :

$$E_0(B,A) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1) = E_0(C) \quad \text{et} \quad E_2(B,A) = E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = E_2(C).$$

I.3.c. En déduire que $\dim(E_0(B,A)) + \dim(E_2(B,A)) = 3$.

I.4.

I.4.a. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C.

I.4.b. Déterminer explicitement une matrice $R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = RDR^{-1}$.

I.4.c. Montrer que $B = ARDR^{-1}$.

I.4.d. Justifier qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$.

Définitions 2 : Soit $(A, B, A', B') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$.

• On dit que le couple (A, B) est **régulier** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$.

• On dit que le couple (A, B) est **équivalent** au couple (A', B') et on note $(A, B) \sim (A', B')$ si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad A = PA'Q \quad \text{et} \quad B = PB'Q.$$

• On dit que le couple (A, B) est **diagonalisable** si :

$$\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \exists D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad (A, B) \sim (D, D').$$

Partie II : RÉGULARITÉ ET DIAGONALISABILITÉ

II.1. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1.a. On suppose dans cette question que B est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, exprimer $\chi_{(A,B)}(\lambda)$ en fonction de $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$ et en déduire que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

II.1.b. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$. Donner un exemple de couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ pour lequel $\chi_{(A,B)}$ est la fonction nulle alors que ni A ni B n'est la matrice nulle.

II.1.c. Montrer que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

II.2.

II.2.a. Montrer que :

$$(A, B) \sim (A', B') \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q.$$

II.2.b. Établir que si (A, B) est équivalent à (A', B'), alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $\chi_{(A,B)} = \alpha \cdot \chi_{(A',B')}$, puis que $\mathrm{Sp}(A, B) = \mathrm{Sp}(A', B')$.

II.3. On suppose dans cette question que (A, B) est régulier.

II.3.a. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\},\ \chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

II.3.b. Montrer que (B, A) est régulier.

II.3.c. On suppose dans cette question que r et s sont deux entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$ et $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_r \neq 0$ et $a_s \neq 0$. On suppose également que $\chi_{(B,A)}$ s'écrit sous la forme :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^k .$$

Montrer que 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre de multiplicité r et que $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n - r$.

II.3.d. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) B est inversible ;

ii) $\chi_{(A,B)}$ est de degré n ;

iii) $0 \notin \mathrm{Sp}(B, A)$.

II.4. On suppose dans cette question que B est inversible. Montrer que si $B^{-1}A$ est diagonalisable, alors (A, B) est diagonalisable.

Définitions 3 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que M est une matrice symétrique réelle. On confondra toute matrice $A = (a)$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec le réel a.

- On dit que M est **positive** si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$.

- On dit que M est **définie-positive** si M est positive et inversible.

Partie III : DIAGONALISABILITÉ DANS LE CAS SYMÉTRIQUE

III.1.

III.1.a. Montrer que pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tXMY = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}x_iy_j$.

III.1.b. En déduire que pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^tXX > 0$.

III.1.c. Montrer que, pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

i) M est définie-positive ;
ii) $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$;
iii) il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $M = PD\,{}^tP$;
iv) il existe $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tLL$.

Dans le cas où M est définie-positive, on pose : $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ \langle X, Y\rangle_M = {}^tXMY$.

III.2. Montrer que si M est définie-positive, l'application $(X,Y) \mapsto \langle X,Y\rangle_M$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III.3. On suppose dans cette question que $(A,B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec B définie-positive. On suppose alors que L est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tLL$ et on définit, par III.2, un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$.

III.3.a. Trouver une matrice $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$AX = \lambda BX \quad\Longleftrightarrow\quad CZ = \lambda Z \quad \text{où on a posé } Z = LX.$$

III.3.b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{I_n}$ et telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ vérifiant : $C\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$.

III.3.c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ et telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $A\mathbf{e}'_i = \lambda_iB\mathbf{e}'_i$.

III.3.d. En déduire que le couple (A,B) est diagonalisable.

III.4. On suppose dans toute la fin de la partie III que le couple (A,B) est régulier et que A et B sont toutes les deux symétriques réelles positives.

III.4.a. Montrer l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $A - \lambda_0B$ soit une matrice symétrique réelle définie-positive.

III.4.b. En déduire que le couple (A,B) est diagonalisable.

Définitions 4 : Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ un couple régulier.

• Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A, B)$, on note $m_\lambda(A, B)$ **l'ordre de multiplicité** de λ en tant que racine de $\chi_{(A,B)}$.

• **Si** B **est inversible**, on note $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B)$, $m_\infty(A, B) = 0$ et $E_\infty(A, B) = \{0\}$.

• **Si** B **n'est pas inversible**, on note $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}$, $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de $\chi_{(B,A)}$ et $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$.

On cherche un critère de diagonalisabilité de (A, B) faisant intervenir $\dim(E_\lambda(A, B))$.

• On dit que (A, B) vérifie **la propriété** $\mathcal{H}$ si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A, B),\ \dim(E_\lambda(A, B)) = m_\lambda(A, B).$$

Partie IV : UN CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ

Dans toute cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ un couple régulier. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda_0 B$ soit inversible.

Dans toute la suite de la partie IV, **on suppose pour simplifier les notations que** $\lambda_0 = 0$ si bien que A **est inversible.**

On note d **le degré** de $\chi_{(A,B)}$ et $C = A^{-1}B$.

Dans les questions suivantes, on pourra être amené à distinguer le cas où B est inversible du cas où B n'est pas inversible.

IV.1.

IV.1.a. Montrer que $E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$.

IV.1.b. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$.

IV.1.c. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des éléments dinstincts de $\mathbb{C}$. Justifier que si $\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, alors $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}\right\}$ où on a posé $\frac{1}{0} = \infty$.

IV.2. Vérifier que $m_\infty(A, B) = n - d$, puis que : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = n$.

IV.3. On suppose dans toute la suite de la partie que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.3.a. Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim(E_\lambda(A, B)) = n$.

IV.3.b. Montrer que C est diagonalisable.

IV.3.c. Établir que le couple (A, B) est diagonalisable.

Dans toute la suite du problème, on admettra que si (A, B) est régulier et que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (A, B) est diagonalisable si et seulement si (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

Partie V : EXEMPLE DE NON-DIAGONALISABILITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \qquad \text{et} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2, \qquad \forall i \in [\![2, n]\!], \qquad f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}.$$

On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et $B_n = {}^t A_n$.
On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est B_n.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{(A_n, B_n)}(\lambda)$ sera noté $c_n(\lambda)$. On définit de plus $c_0(\lambda) = 1$.

V.1. Donner la forme explicite des matrices A_n et B_n.

V.2. Vérifier que la matrice de $f - \lambda g$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -\lambda & 0 & 1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -\lambda & 0 & 1 \\ & & & & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

V.3.

V.3.a. Calculer $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ et $c_4(\lambda)$.
V.3.b. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $c_n(\lambda) = \lambda \cdot c_{n-2}(\lambda)$.
V.3.c. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, les expressions de $c_{2k}(\lambda)$ et de $c_{2k+1}(\lambda)$.
V.3.d. Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que (A_n, B_n) soit régulier.

V.4.

V.4.a. Déterminer $\dim\left(E_0(A_4, B_4)\right)$ et $\dim\left(E_\infty(A_4, B_4)\right)$.
V.4.b. Calculer $m_0(A_4, B_4)$ et $m_\infty(A_4, B_4)$.
V.4.c. Le couple (A_4, B_4) est-il diagonalisable ?

Fin de l'énoncé