

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Physique

MP

2012

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autre, de mesurer la hauteur des océans.

Dans une première partie, le problème étudie la trajectoire de ce satellite au-dessus de l'ionosphère, d'abord en considérant la Terre comme sphérique, puis en prenant en compte sa non-sphéricité. La seconde partie du problème aborde la diffusion des ondes radar sur l'océan et la troisième partie étudie l'influence de l'ionosphère sur la propagation de telles ondes.

Les trois parties sont indépendantes.

Notations

Dans tout le problème, $\langle f(M, t) \rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur $f(M, t)$.

La pulsation ω sera toujours réelle, positive, non nulle.

À toute grandeur réelle $f(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$, on pourra associer la grandeur complexe $\underline{f}(M, t) = A(M) \exp i(\omega t - \varphi(M))$.

Le nombre imaginaire i est tel que $i^2 = -1$.

La polarisation d'une onde électromagnétique fera référence au champ électrique.

Données utiles

Masse d'un proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Masse d'un électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19}$ C
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F · m ⁻¹
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H · m ⁻¹
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8$ m · s ⁻¹
Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6378$ km
Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique	$\omega_T = 7,29 \times 10^{-5}$ rad · s ⁻¹

Formulaire

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}}(\vec{A}) \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div}(\vec{A}) \right) - \Delta \vec{A}$$

Gradient d'un champ scalaire V en coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données de l'énoncé.

I Le satellite Jason 2

I.A – Étude de l'orbite

I.A.1) Rappeler l'expression de la force de gravitation \vec{F} qu'exerce la Terre (centre T , masse M_T) sur un satellite (point matériel S , masse m), en fonction de la constante de gravitation G , des masses M_T et m , de la distance $r = TS$ et du vecteur unitaire $\vec{u}_{TS} = \vec{TS}/TS$.

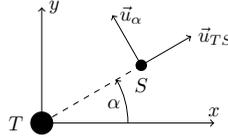


Figure 1

I.A.2) On se place dans le référentiel géocentrique (T, x_g, y_g, z_g) noté (\mathcal{R}_g) , de base fixe $(\vec{e}_{x_g}, \vec{e}_{y_g}, \vec{e}_{z_g})$ (figure 2b).

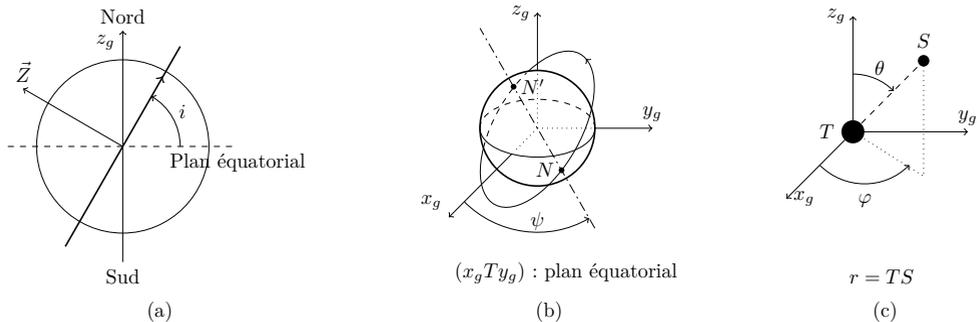


Figure 2

a) Définir le référentiel géocentrique. Pourquoi ce référentiel n'est-il pas rigoureusement galiléen ? Justifier.

Dans toute la suite, le référentiel géocentrique (\mathcal{R}_g) est considéré comme galiléen et, sauf mention contraire, seule l'action de la Terre est prise en compte.

b) Dans ce référentiel, quelles sont les deux grandeurs mécaniques du satellite qui se conservent (on justifiera la réponse) ? Quelles caractéristiques du mouvement peut-on en déduire ?

I.A.3) On se propose d'établir l'expression de la trajectoire du satellite autour de la Terre à partir de l'invariant dynamique de Runge-Lenz. On définit le vecteur de Runge-Lenz par $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_T - GM_T m \vec{u}_{TS}$ où \vec{v} est la vitesse du satellite dans (\mathcal{R}_g) et $\vec{\sigma}_T$ le moment cinétique du satellite dans (\mathcal{R}_g) , calculé en T .

a) Calculer $\frac{d\vec{R}}{dt}$ dans (\mathcal{R}_g) . Conclure.

b) Dans quel plan se trouve \vec{R} ? Justifier.

c) On note R la norme de \vec{R} et β l'angle entre \vec{R} et \vec{TS} . Montrer que $\vec{R} \cdot \vec{u}_{TS} = \frac{\sigma_T^2}{m r} - GM_T m$ où σ_T est la norme du moment cinétique $\vec{\sigma}_T$ du satellite. En déduire l'expression de la trajectoire du satellite sous la forme $r(\beta) = \frac{p}{1 + e \cos \beta}$; donner les expressions de p et e en fonction de σ_T , G , M_T , m et R .

Suivant les valeurs de e , rappeler les différentes trajectoires possibles.

I.A.4) On admet que la trajectoire de Jason 2 est circulaire (en réalité, $e = 9,5 \times 10^{-5}$), de centre T , de rayon $r_0 = 7714$ km, soit une altitude $h = 1336$ km (juste au dessus de l'ionosphère). La masse du satellite Jason 2 est $m = 525$ kg.

Établir en fonction de G , M_T , m et r_0 , les expressions de :

- la norme de la vitesse orbitale du satellite v_0 ;
- la période de révolution T_0 ;
- son énergie mécanique E_m .

Calculer numériquement ces grandeurs pour le satellite Jason 2.

I.B – Écart à la trajectoire circulaire

On appelle inclinaison du satellite l'angle $i = 66^\circ$ entre le plan équatorial et le plan de l'orbite (ici $0^\circ < i < 90^\circ$: on parle d'orbite prograde) (cf. figure 2a). On note \vec{Z} le vecteur unitaire orthogonal au plan de l'orbite et orienté à partir du sens de parcours de la trajectoire (le sens de parcours est indiqué sur les schémas). On appelle nœuds N et N' les deux intersections de la trajectoire circulaire du satellite avec le plan équatorial (figure 2b).

À cause des irrégularités de la répartition de la masse terrestre (en particulier l'aplatissement aux pôles) et des forces d'attraction de la Lune et du Soleil, en utilisant les coordonnées sphériques (figure 2c.), le potentiel de gravitation V s'écrit (à l'ordre le plus bas en la perturbation) :

$$V(r, \theta) = -\frac{GM_T}{r} \left(1 - \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \frac{J_2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

où $J_2 = 1083 \times 10^{-6}$ est un nombre sans dimension.

I.B.1) Déterminer les composantes g_r, g_θ, g_φ du champ de gravitation dans la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (cf. figure 2c). Donner l'ordre de grandeur de la valeur maximale du rapport $|g_\theta/g_r|$ dans le cas du satellite Jason 2. Conclure.

La composante g_r confère à la trajectoire les propriétés essentielles (mouvement plan, circulaire) ; on se propose d'étudier l'influence de g_θ .

I.B.2) Soit $\vec{\Gamma}_T$ le moment en T de la force de gravitation, appliquée en S . Déterminer ses coordonnées dans la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Ce moment peut également être projeté dans la base fixe $(\vec{e}_{xg}, \vec{e}_{yg}, \vec{e}_{zg})$ de (\mathcal{R}_g) (cf. figures 2b et c) ; on peut montrer (la démonstration n'est pas demandée au candidat) qu'en moyennant sur une période T_0 on obtient, pour le mouvement circulaire du satellite :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_x \rangle &= -\sigma_T \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{R_T}{r_0} \right)^2 \frac{3}{2} J_2 \sin i \cos i \cos \psi \\ \langle \Gamma_y \rangle &= -\sigma_T \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{R_T}{r_0} \right)^2 \frac{3}{2} J_2 \sin i \cos i \sin \psi \\ \langle \Gamma_z \rangle &= 0 \end{aligned}$$

I.B.3) Exprimer $\vec{\sigma}_T$ en fonction de sa norme σ_T, i, ψ et des vecteurs unitaires $\vec{e}_{xg}, \vec{e}_{yg}$ et \vec{e}_{zg} .

Déterminer ensuite $\frac{d\vec{\sigma}_T}{dt}$ dans (\mathcal{R}_g) (à ce stade, on considèrera que σ_T, i et ψ dépendent du temps).

En admettant que $\frac{d\vec{\sigma}_T}{dt} = \langle \vec{\Gamma}_T \rangle$ et que la norme σ_T reste à peu près constante, déterminer de nouvelles expressions de $\langle \Gamma_x \rangle, \langle \Gamma_y \rangle$ et $\langle \Gamma_z \rangle$.

I.B.4) Montrer que i ne dépend pas du temps et que

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{GM_T}{r_0^3}} \left(\frac{R_T}{r_0} \right)^2 \cos i$$

Dans la suite, on note $\Omega = \frac{d\psi}{dt}$. Que représente le vecteur $\vec{\Omega}$ correspondant à cette variation ? Comparer les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}_T$ (vecteur rotation de la Terre sur elle-même) en direction et sens. En s'aidant de la figure 2b et du théorème du moment cinétique en T , montrer qu'on pouvait prévoir le sens de variation de ψ .

I.B.5) On définit alors une nouvelle période, la *période nodale*, qui est le temps entre deux passages à l'équateur dans le même sens. Pour Jason 2, elle vaut $T_n = 112 \text{ min } 26 \text{ s}$, elle est très voisine de T_0 .

Pour les satellites océanographiques, il est intéressant d'avoir un échantillonnage homogène de la surface du globe pendant une période, appelée période de répétitivité T_R : il faut pour cela que le satellite repasse à la verticale des mêmes points du sol tous les $T_R = N T_n$ où N est le nombre entier de révolutions du satellite durant une période de répétitivité.

On note k le nombre de fois où un même point du sol croise le plan de l'orbite du satellite dans un sens donné pendant une période de répétitivité.

Déterminer l'expression de k en fonction de T_n, ω_T, Ω et N . Calculer la valeur de k pour $N = 127$.

II Diffusion des ondes radar par l'océan

Un radar altimétrique embarqué émet une onde électromagnétique (onde radio de fréquence $f = 13,6$ GHz).

L'onde est émise en direction de la mer, celle-ci absorbe l'onde et la réémet : on parle de diffusion. Cette onde rétrodiffusée, appelée écho, est captée en retour par le radar.

La mesure de la durée du trajet aller-retour permet de déterminer la distance {surface océan – satellite}; par différence avec la position du satellite par rapport à un ellipsoïde de référence, on en déduit la hauteur de la mer.

On supposera que, durant ce trajet aller-retour, le satellite est immobile au dessus de la mer.

Dans toute cette partie, l'atmosphère sera assimilée au vide (indice optique égal à 1). Certaines perturbations apportées par le fait que l'ionosphère est un plasma seront abordées dans la partie III.

II.A – Diffusion sur une mer plate

On s'intéresse au processus de rétrodiffusion de l'onde réémise par une surface S de l'océan, éclairée par le radar. L'onde arrivant sur l'océan est considérée comme plane (bien qu'étant sphérique). Elle se propage dans la direction $\vec{u} = \sin\theta \vec{e}_y - \cos\theta \vec{e}_z$ (figure 3) (θ est sans rapport avec celui de la partie I). La direction de propagation n'est donc pas forcément celle de la verticale.

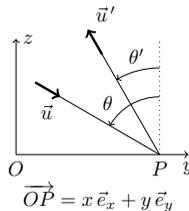


Figure 3

On s'intéresse à la rétrodiffusion dans la direction θ' , cette rétrodiffusion est à rapprocher de la diffraction à l'infini. On considère que les angles θ et θ' sont faibles.

L'amplitude de l'onde diffractée (ou rétrodiffusée) en un point M à l'infini par une ouverture de surface S est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{A}_d(M) = \underline{K} \iint_S \underline{t}(P) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \vec{OP}\right) dS$$

où \underline{K} est une constante complexe, $\underline{t}(P)$ un coefficient rendant compte de l'efficacité de la diffusion et λ la longueur d'onde de l'onde radar.

On s'intéresse à une portion de mer carrée, de côté $a = 7$ km selon les axes x et y , centrée en O , lisse de telle sorte que $\underline{t}(P) = t_0$ avec $t_0 \in \mathbb{R}_+$. On considèrera que les vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{u}' des rayons incidents et rétrodiffusés sont toujours dans le plan (yOz) (cf. figure 3).

II.A.1) Déterminer l'éclairement diffracté (ou rétrodiffusé) \mathcal{E}_d en M , en fonction de θ , θ' , λ , a et de l'éclairement maximal \mathcal{E}_0 .

II.A.2) Pour quel angle θ' l'éclairement est-il maximal? Cela peut-il correspondre à l'écho perçu par le satellite?

II.B – Diffusion sur une mer houleuse

On envisage la même portion de mer, mais cette fois-ci houleuse, de telle sorte que

$$\underline{t}(P) = t_0 + t_1 \cos\left(\frac{2\pi y}{d}\right)$$

avec $a \gg d$ et $a \gg \lambda$.

II.B.1) L'hypothèse $a \gg \lambda$ était-elle valable à la question précédente?

II.B.2) Montrer que l'onde diffusée est constituée de trois ondes se propageant dans trois directions que l'on déterminera en fonction de λ , d et θ .

II.B.3) Laquelle de ces trois ondes est susceptible de correspondre à l'écho reçu par le satellite? Quelle condition doivent vérifier d , λ et θ pour pouvoir effectivement récupérer cet écho?

III Propagation d'ondes électromagnétiques

III.A – Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1) Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants.

Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?

III.A.2) Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

III.A.3) On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).

III.A.4) À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

III.A.5) Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.

III.A.6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

III.B – Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1) En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{j}(M, t)$, établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ en fonction de $\vec{j}(M, t)$.

III.B.2) On considère une onde du type $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x) \vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose, en notation complexe, la relation d'Ohm : $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$ où γ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

Réécrire l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ en fonction de γ .

À quelle condition sur \underline{k} et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

III.B.3) On pose $\underline{k} = k_1 + i k_2$, avec k_1 et k_2 réels.

a) Écrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

b) Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1 , la partie réelle de \underline{k} . Donner une interprétation du signe de k_1 . Quel phénomène physique traduit k_2 , la partie imaginaire de \underline{k} ?

Que dire si le produit $k_1 k_2$ est positif ? Que dire si le produit $k_1 k_2$ est négatif ?

c) Définir par une phrase la vitesse de phase v_φ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies.

III.B.4) Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\vec{E}(M, t)$, \vec{k} (vecteur d'onde complexe) et $\vec{B}(M, t)$. Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ et du champ réel $\vec{B}(M, t)$. Que dire des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ si k_2 est non nul ?

III.B.5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$. Commenter.

III.B.6) Une onde incidente, $\vec{E}_i(M, t) = E_{0i} \exp i(\omega t - \underline{k}_A x) \vec{e}_y$ où $E_{0i} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k}_A = k_{A1} + i k_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B).

Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\vec{E}_r(M, t) = E_{0r} \exp i(\omega t + \underline{k}_A x) \vec{e}_y$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\vec{E}_t(M, t) = E_{0t} \exp i(\omega t - \underline{k}_B x) \vec{e}_y$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + i k_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B).

On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r(O, t)\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i(O, t)\| \rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_t(O, t)\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i(O, t)\| \rangle}$$

où $\vec{\Pi}_i(O, t)$, $\vec{\Pi}_r(O, t)$ et $\vec{\Pi}_t(O, t)$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point O de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\|\vec{A}\|$ désigne le module du vecteur \vec{A}).

a) Justifier l'écriture du champ $\vec{E}_r(M, t)$.

b) Donner les expressions de R et de T en fonction des données précédentes.

- c) Que vaut la somme $R + T$? Quelle est la signification de cette égalité?
 d) Que dire des coefficients R et T si $k_{B1} = 0$? Quelle en est la signification?
 Ne pouviez-vous pas prévoir ce résultat dès les questions III.B.4 ou III.B.5?
 e) Connaissez-vous un exemple similaire en électrocinétique?

III.C – Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e , égale à $n_1 = 1,00 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_C , égale aussi à n_1 , l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x) \vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau $\underline{k} = k_1 + i k_2$, avec k_1 et k_2 réels; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans toute la suite, vous pourrez utiliser les résultats démontrés dans la partie III.B.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant c).

III.C.1) En admettant que le rapport $\omega/|\underline{k}|$ est de l'ordre de c , montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

III.C.2) En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_e (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_i d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i \frac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.

III.C.3) Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

III.C.4) Établir l'expression de \underline{k}^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde?

III.C.5) On se place dans le cas $\omega < \omega_p$.

- a) Donner l'expression de \underline{k} en fonction de ω_p , ω et c (on prendra k_2 négatif).
 b) Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Caractériser l'onde obtenue.
 c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ dans le plasma.

III.C.6) On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

- a) Donner l'expression de \underline{k} en fonction de ω_p , ω et c . Commenter.
 b) Donner les expressions de $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs).
 c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$.
 d) Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p , ω et c . Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse)?
 e) Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p , ω et c . Donner la signification physique de cette vitesse.
 f) Comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c . Que penser du fait que $v_\varphi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

III.C.7) Le choix de la fréquence des ondes radars émises par Jason 2 ($f = 13,6 \text{ GHz}$) vous semble-t-il correct ?

• • • FIN • • •