SESSION 2010 **PCM1002**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

* * **

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * **

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f, Ker (f) et Im (f) désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^\star$) alors $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \ldots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

4) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda \mathrm{id}) \circ (f - \mu \mathrm{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(E) \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE III

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$$

2) En déduire que $\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}\ (p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_\ell \mathrm{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i, j \leqslant m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ p_i & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

8.1) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f.

8.2) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.

8.3) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors $2p - 1 \leqslant n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta\mathrm{id}) \neq \emptyset$.

B) 1) Soit $T = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ.

Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ. Déduire de la question précédente que $E = \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

Fin de l'énoncé