

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
 SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
 TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
 MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
 TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIERE MP)
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2010

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. La barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

ÉLÉMENTS D'ASTROPHYSIQUE

Ce problème se propose d'étudier dans un premier temps la formation et l'évolution d'une étoile et de s'intéresser ensuite à différents objets célestes tels que les comètes, les pulsars et les exoplanètes. Toutes les sous-parties sont indépendantes entre elles. Les données nécessaires aux applications numériques sont rassemblées à la fin du sujet. Les vecteurs sont notés avec un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u} , avec une flèche \vec{v} dans le cas général. Hormis $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

I. — Étude physique des étoiles

Dans toute cette partie on considère qu'une étoile est une boule de masse M , de rayon R , de masse volumique ρ supposée constante et entourée de vide.

I.A. — Énergie potentielle d'une étoile sphérique, théorème du viriel

□ **1** — On considère deux particules ponctuelles notées Q_1 et Q_2 de masses m_1 et m_2 séparées par une distance r . Donner l'expression la force d'interaction gravitationnelle $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par Q_1 sur Q_2 . On utilisera le vecteur unitaire $\hat{u} = \vec{Q}_1 \vec{Q}_2 / r$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation E_p associée à cette force en fonction de m_1, m_2, r et de la constante de gravitation G . On fixera l'origine du potentiel de telle manière que $E_p = 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

On souhaite exprimer l'énergie potentielle de gravitation d'une boule homogène de masse M , de centre O , de rayon R et de masse volumique ρ supposée constante. Cette énergie correspond à l'énergie de constitution de la boule en amenant successivement depuis l'infini des couches sphériques concentriques d'épaisseur dr .

□ 2 — On considère un état intermédiaire \mathcal{B}_r de la boule dans lequel elle possède un rayon r tel que $0 < r < R$ et une masse m_r telle que $0 < m_r < M$. Justifier le fait que l'interaction entre \mathcal{B}_r et un corps ponctuel massif \mathcal{N} situé hors de \mathcal{B}_r est équivalente à celle entre une particule ponctuelle située en O de masse m_r et \mathcal{N} . On ajoute à \mathcal{B}_r une couche sphérique \mathcal{C}_r de masse dm et d'épaisseur dr . Déterminer l'énergie potentielle de gravitation dE_p entre \mathcal{B}_r et \mathcal{C}_r . On exprimera dE_p en fonction de r , dr et de ρ . En déduire que l'énergie potentielle de gravitation de la boule de rayon R s'écrit $E_p = \alpha GM^2/R$ où α est une constante numérique que l'on déterminera.

On considère à présent que l'étoile est constituée d'un gaz parfait, chaque particule de ce gaz étant un atome d'hydrogène d'énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}k_B T$ où $k_B = \mathcal{R}/\mathcal{N}$ est la constante de Boltzmann, \mathcal{R} est la constante des gaz parfaits et \mathcal{N} le nombre d'Avogadro. La pression donnée par la loi des gaz parfaits est ici uniquement d'origine cinétique et on ne tient donc pas compte de la pression de radiation. Dans ce modèle, la pression P et la température T sont des fonctions de la seule coordonnée radiale r , enfin le nombre de particules par unité de volume n est constant à l'intérieur de l'étoile. On suppose de plus que l'étoile est entourée de vide, ainsi $P(R) = 0$.

□ 3 — Exprimer l'énergie cinétique totale E_c des particules constituant l'étoile sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la pression $P(r)$. En écrivant l'équation d'équilibre hydrostatique, et en effectuant une intégration par parties, montrer que l'on obtient la relation

$$2E_c = \kappa E_p$$

où κ est un facteur numérique que l'on déterminera. Cette relation constitue le théorème du viriel, il est très utilisé en astrophysique pour décrire les propriétés d'objets tels que les étoiles ou les galaxies.

I.B. — Pression et température dans une étoile, réactions de fusion

□ 4 — En intégrant l'équation d'équilibre hydrostatique, déterminer la pression $P(r)$ au sein de l'étoile en fonction de M , G , R et r . Pour quelle valeur de r cette pression est-elle maximale ? Exprimer cette valeur maximale P_{max} en fonction de G , M et R ainsi que la température maximale T_{max} correspondante en fonction de G , M , R , \mathcal{R} et de la masse molaire de l'hydrogène \mathcal{M}_H . Calculer numériquement P_{max} et T_{max} dans le cas du Soleil.

□ 5 — On considère qu'au sein de l'étoile, chaque atome d'hydrogène occupe un petit cube d'arête β . Exprimer ρ en fonction de \mathcal{M}_H , \mathcal{N} et β , en déduire une expression de R en fonction de \mathcal{M}_H , \mathcal{N} , M et β . Montrer alors que l'on peut mettre la masse de l'étoile sous la forme :

$$M = K(\beta T_{max})^{3/2} \quad (1)$$

où la constante K ne dépend que de constantes fondamentales. Calculer la valeur numérique de K .

Pendant une grande partie de leur existence, les étoiles tirent leur énergie de réactions de fusion thermonucléaire entre des atomes d'hydrogène qui produisent des atomes d'hélium. Pour que ces réactions puissent s'amorcer au centre de l'étoile, il faut que l'énergie d'agitation thermique des atomes dépasse l'énergie potentielle de répulsion coulombienne. La température qui règne au centre des étoiles permet de supposer que les atomes d'hydrogène qui fusionnent sont complètement ionisés. On considérera ici que l'énergie d'agitation thermique d'un de ces atomes est égale à son énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}k_B T$.

□ 6 — Déterminer l'énergie potentielle électrostatique d'interaction u_{pp} entre deux protons séparés d'une distance β , on fixera l'origine du potentiel de telle manière que $u_{pp} = 0$ lorsque $\beta \rightarrow \infty$. En utilisant le résultat (1) de la question 5, déterminer la valeur limite M_ℓ de la masse de l'étoile pour que les réactions de fusion puissent avoir lieu. On exprimera M_ℓ en fonction de K , k_B , e_0 et de la charge élémentaire e . Vérifier que la masse du Soleil est bien suffisante pour permettre la fusion de l'hydrogène. L'homme a-t-il déjà réalisé des réactions de fusion nucléaire ?

I.C. — Phénomènes convectifs

Depuis le début de cette partie, nous avons supposé que l'étoile était en équilibre hydrostatique. Dans le cas du Soleil, les couches externes (pour r compris entre $0,7R$ et R) sont le siège de mouvements de convection dans la direction radiale, causés par une variation rapide de la température. On admet que cette convection ne brise pas l'état d'équilibre si le gradient de température n'est pas trop grand, et en particulier inférieur en module à celui correspondant à une transformation isentropique.

□ 7 — Exprimer la composante radiale du gradient de température $\frac{dT}{dr}$ au sein d'une étoile sphérique constituée d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = c_p/c_v$ en évolution isentropique en fonction de la pression $P(r)$, de la température $T(r)$ et de la composante radiale du gradient de pression.

I.D. — Puissance émise et durée de vie du Soleil

Pour rendre compte de la puissance émise par le Soleil, on néglige la conduction et la convection thermique et on ne retient que le processus d'échange thermique radiatif décrit ci-dessous. Chaque sphère de rayon r au sein du Soleil cède, pendant dt , l'énergie

$$\delta W_r = \phi(r)dt$$

où la quantité $\phi(r)$ est appelée flux radiatif d'énergie. Ce flux est radial et dirigé vers l'extérieur. La production d'énergie dans le Soleil est assurée par les réactions nucléaires au cœur de l'étoile, mais selon un modèle très simple, nous supposons que la puissance ε dégagée par unité de masse par ces réactions, décroît linéairement avec le rayon selon la relation

$$\varepsilon(r) = \sigma \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) \quad \text{avec } 0 < r < R_S$$

L'unité de ε est le W.kg^{-1} et σ est une constante. La masse du Soleil est notée M_S , son rayon R_S et sa masse volumique ρ_S est supposée constante dans ce modèle.

□ 8 — En écrivant un bilan énergétique sur une couche sphérique d'épaisseur dr en régime permanent, déterminer $\phi(r)$ si l'on fait l'hypothèse que le flux radiatif est nul en $r = 0$. En déduire la puissance $\mathcal{P} = \phi(R_S)$ émise par le Soleil dans tout l'espace en fonction de σ et de sa masse M_S . Des mesures depuis la Terre, ou depuis un satellite, indiquent que $\mathcal{P} = 3,8 \times 10^{26} \text{W}$, calculer la valeur numérique de la constante σ .

L'énergie transportée au sein du Soleil est produite par les réactions de fusion de l'hydrogène en hélium qui ont lieu en son cœur : la région centrale la plus chaude représentant 14% de sa masse. Chacune de ces réactions convertit 4 atomes d'hydrogène en un atome d'hélium et fournit l'énergie $E_f = 4,23 \times 10^{-12} \text{J}$. On évalue à 70% la masse du cœur susceptible de fusionner en hélium. On fait l'hypothèse que la puissance émise par le Soleil est constante.

□ 9 — En utilisant une célèbre équation d'Albert Einstein, déterminer la valeur numérique de la masse transformée en énergie par le Soleil chaque seconde. En déduire la valeur numérique de la masse d'hydrogène transformée en hélium par le Soleil chaque seconde. Combien de temps reste-t-il au Soleil avant qu'il ait épuisé tout son hydrogène ? On exprimera ce temps en années.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Quelques problèmes d'astrophysique

II.A. — Orientation de la queue d'une comète

Une particule sphérique de rayon μ de masse volumique ρ_c située dans l'espace interstellaire à la distance r du Soleil reçoit de la part de cette étoile une énergie δW pendant l'intervalle de temps dt . Si l'on considère que toute cette énergie est absorbée par la particule, celle-ci subit une force \vec{F} radiale répulsive, due à la pression de radiation, dont le module s'écrit $F = \frac{1}{c} \frac{\delta W}{dt}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

□ 10 — Déterminer l'expression de F en fonction de μ , r , c et de la puissance \mathcal{P} émise par le Soleil. À quelle condition sur μ cette force est-elle supérieure à la force de gravitation exercée par le Soleil sur la particule ? La valeur limite μ_ℓ sera exprimée en fonction de \mathcal{P} , G , M_S , ρ_c et c . Calculer la valeur numérique de μ_ℓ pour une valeur de la masse volumique $\rho_c = 3,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

□ 11 — Une comète est constituée d'un noyau, d'une chevelure et de plusieurs queues dont l'une, constituée de fines poussières, est toujours située à l'opposé du Soleil par rapport au noyau. Comment interprétez-vous ces observations ?

II.B. — Mesure de la distance d'un pulsar par la méthode de dispersion

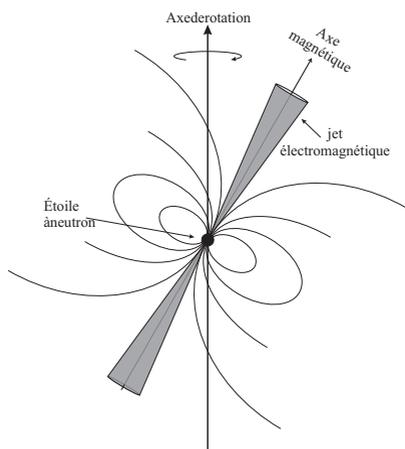


FIG. 1 — Schéma d'un pulsar.

Après avoir consommé tout leur carburant nucléaire, la plupart des étoiles massives s'effondrent et forment une structure très compacte composée de neutrons. On parle d'étoile à neutrons. La conservation du moment cinétique impose une rotation très rapide à ce type d'étoile, de l'ordre d'un tour par seconde. La structure dipolaire du champ magnétique intense régnant autour des étoiles à neutrons, permet l'émission d'ondes électromagnétiques par les régions polaires du champ magnétique. Si l'axe de rotation de l'étoile à neutrons n'est pas aligné avec l'axe de symétrie du champ magnétique, on peut alors observer un pulsar (voir figure 1) depuis la Terre. Cette onde est associée à un champ électrique \vec{E} dont la représentation complexe s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ où \vec{E}_0 est un vecteur constant. Cette onde se propage dans le milieu interstellaire que nous assimilerons à un plasma homogène globalement neutre et constitué de N électrons par m^3 et N ions par m^3 libres de se déplacer.

Les ions sont supposés immobiles et les électrons ne sont soumis qu'à la force imposée par le champ électromagnétique de l'onde émise par le pulsar.

□ 12 — Pourquoi cette onde est-elle reçue sur Terre sous la forme d'un signal impulsionnel périodique ? Quelle est la fréquence de ces impulsions ?

□ 13 — En appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation vérifiée par la vitesse \vec{v}_e d'un électron du plasma interstellaire. Dans quelle condition la force magnétique est-elle négligeable ? Établir la relation de dispersion de l'onde dans le plasma liant $k = \|\vec{k}\|$ et ω . On fera intervenir la pulsation plasma ω_p telle que $\omega_p^2 = Ne^2 / (m_e \epsilon_0)$.

□ 14 — Si $\omega > \omega_p$, la vitesse de propagation de l'énergie, ou vitesse de groupe \vec{v}_g , a pour module $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Exprimer v_g en fonction de c , ω et ω_p . Donner une forme approchée à l'ordre 2 de cette expression dans le régime $\omega \gg \omega_p$.

□ 15 — Une partie du signal émis par le pulsar se décompose en la superposition de 2 ondes électromagnétiques de fréquences différentes f_1 et f_2 . On considère que ces ondes sont émises au même instant dans notre direction pendant un intervalle de temps très bref. Après avoir parcouru la distance d dans le plasma interstellaire, elles arrivent sur Terre avec un décalage dans le temps δt . En conservant l'hypothèse $\omega \gg \omega_p$, exprimer d en fonction de δt , f_1 , f_2 , ω_p et c .

□ 16 — La densité moyenne d'électrons dans le plasma interstellaire est $N = 1,0 \times 10^4$ électrons.m⁻³. Dans le cas du pulsar PSR0950+08, on observe un décalage $\delta t = 0,05$ s entre des signaux de fréquences $f_1 = 234$ MHz et $f_2 = 405$ MHz. Après avoir vérifié l'hypothèse de la question 15, calculer sa distance d en années-lumière.

II.C. — La planète Osiris

En 1999, des astrophysiciens ont observé une baisse périodique de la luminosité de l'étoile HD 209458 située dans la constellation de Pégase à 150 années-lumière de la Terre. Cette chute de luminosité dure quelques heures puis la luminosité reprend sa valeur habituelle, le phénomène se reproduit avec une période $T = 3,5$ jours. On interprète cette variation par l'existence d'une planète, baptisée Osiris, tournant autour de l'étoile et dont on admettra que le plan de l'orbite passe par la Terre. La luminosité de la planète est supposée négligeable par rapport à celle de l'étoile. On supposera également dans la suite que la masse m_2 de la planète Osiris est très inférieure à la masse m_1 de l'étoile HD 209458 et qu'Osiris est l'unique planète de cette étoile.

□ 17 — Pourquoi la baisse périodique de luminosité peut-elle s'interpréter comme l'existence d'une planète ? Sachant que la baisse périodique de luminosité observée est de 1,7% , exprimer le rayon R_2 d'Osiris en fonction du rayon R_1 de HD 209458. Par des mesures spectrométriques, on peut déterminer le type de l'étoile HD 209458 ce qui permet d'obtenir (en utilisant un modèle d'étoile) son rayon, on trouve $R_1 = 1,1 R_S$. En déduire la valeur numérique de R_2 que l'on exprimera en fonction du rayon moyen de Jupiter R_J .

□ 18 — Les effets de marée conduisent rapidement à l'annulation de l'excentricité de l'orbite de la planète dans ce type de configuration. Préciser, dans ces conditions, le type de mouvement suivi par Osiris autour de son étoile. Pendant l'intervalle de temps nécessaire aux diverses mesures, on peut considérer que le système HD 209458–Osiris est en translation à la vitesse \vec{v}_i dans le référentiel géocentrique. La composante radiale de cette vitesse est mesurable depuis la Terre en utilisant l'effet Doppler-Fizeau. On remarque que cette vitesse radiale varie périodiquement entre les valeurs extrêmes $v_{r-} = 14,68$ km.s⁻¹ et $v_{r+} = 14,85$ km.s⁻¹. Déterminer le module v_1 de la vitesse orbitale de l'étoile HD 209458 dans le référentiel \mathcal{R}_B barycentrique du système HD 209458–Osiris.

□ 19 — On note v_2 le module de la vitesse orbitale de la planète Osiris dans \mathcal{R}_B supposé galiléen. Quelle relation existe-t-il entre m_1 , m_2 , v_1 et v_2 ? Exprimer m_2 en fonction de v_1 , m_1 , T et de la constante de gravitation G . On pourra négliger m_2 devant m_1 .

□ 20 — Sachant que $m_1 = 1,1 M_S$, calculer la valeur numérique de m_2 en fonction de la masse M_J de Jupiter.

FIN DE LA PARTIE II

Pour les applications numériques, on utilisera les données suivantes

Masse molaire de l'hydrogène : $\mathcal{M}_H = 1,0 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$	Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
Constante de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$	Rayon solaire : $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$
Constante des gaz parfaits : $\mathcal{R} = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$	Masse de Jupiter : $M_J = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	Rayon de Jupiter : $R_J = 7,0 \times 10^7 \text{ m}$
Permittivité du vide : $\epsilon_0 = (36\pi)^{-1} \times 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$	Masse de la Terre : $M_{\oplus} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$	Rayon terrestre : $R_{\oplus} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
Constante d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	
Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	
Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$	

FIN DE L'ÉPREUVE