CONCOURS COMMUN 2009
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 19 mai 2009 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1.

On rappelle que le nombre $e = \exp(1) \approx 2{,}72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\ln(3) \approx 1{,}10$.

I Etude d'une fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x) = 3x\exp(-x^2)-1 = 3xe^{-x^2}-1$.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative C_f de f.

2 Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de C_f d'abscisse 0 ?

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4 Donner l'allure de la courbe C_f de f.

5

a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?

b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

II Etude d'une équation différentielle.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy'-(n-2x^2)y = n-2x^2$. Soit H_n l'équation homogène (dite aussi sans second membre) associée à E_n.

6 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

7 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

8 Donner toutes les fonctions f définies, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

III Etude de deux suites.

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

9 Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

10 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

11 Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

12

a) Calculer $\exp(-u_n{}^2) = e^{-u_n{}^2}$ en fonction de $u_n{}^n$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit l sa limite.

13 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln 3 + n\ln x - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que : $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2\ w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

IV Etude d'une courbe paramètrée.

Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit M la courbe paramétrée définie sur $]0, +\infty[$ tel que pour tout t strictement positif, $M(t)$ ait pour coordonnées dans le repère R, $(x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = g_2(t) = \ln 3 + 2\ln(t) - t^2 \\ y(t) = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

14

a) Etudier les variations de x et y ainsi que leurs limites aux bornes du domaine de définition.

b) Etudier les branches infinies de la courbe M.

c) Etudier la nature du point $M(1)$. Donner un vecteur directeur de la tangente en $M(1)$ à la courbe.

15 Tracer l'allure de la courbe M.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Problème 2.

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d'un polynôme $P(X)$.

I Etude d'un polynôme.

16 Soit $U(X)$ le polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ suivant : $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$.

a) Donner les racines carrées de $-3+4i$.

b) Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $U(X)$.

17 Soit le complexe z, $z = x+iy$ avec x et y réels.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $U(z)$ en fonction de x et de y.

b) Soit le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.)

i) Soit Γ_1 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est imaginaire pur. Donner la nature de Γ_1, son centre et son excentricité. Tracer Γ_1.

ii) Soit Γ_2 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est réel. Donner sa nature et son centre. Tracer Γ_2 sur le même dessin que Γ_1.

II Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème. **Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n**. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$). On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

18 Montrer que f est une application linéaire.

19 Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

20 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

a) Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

21 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X-1-i)(X+i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$ par l'application f.

III Etude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3+X^2+a$.

22 Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

23 Calculer le déterminant de f_3.

24 Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

25 Dans cette question $a = -1$.

a) Donner une base de $\ker f_3$, le noyau de f_3.

b) Donner une base de $\operatorname{Im} f_3$, l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

IV Etude du noyau.

26 Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

27 Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

28 En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

29 Déduire de la question **27** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P(X))+k \leq n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

30 On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à n-d tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

31 On suppose dans cette question que $T(X) = X^3+X^2-1$. Donner le noyau de f.

V Etude d'un produit scalaire.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considérera $g = f_2$ la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.

32 Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

33 Soit $<.\,,.>$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall\, (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2, <U(X), V(X)> = U(1)\times V(1)+U'(1)\times V'(1)+U''(1)\times V''(1)$.
(Où $U'(X)$ et $V'(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées de $U(X)$ et $V(X)$ et $U''(X)$ et $V''(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées secondes de U et V.)

Montrer que $<.\,,.>$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

34 Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale. (C'est-à-dire $A\times {}^tA=I_3$ où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité.)

35 L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $<.\,,.>$? On pourra calculer $< 1, 1>$ et $<g(1), g(1)>$.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .