

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2009

FILIERE PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

Deux phénomènes d'hystérésis

Soient une grandeur *cause* notée C et une grandeur *effet* notée E . Il y a hystérésis lorsque la courbe $E = f(C)$ obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe $E = f(C)$ obtenue à la décroissance de C . Ce problème propose d'étudier deux exemples de systèmes physiques présentant un phénomène d'hystérésis.

Formulaire : Sous des hypothèses de régularité appropriées, une fonction périodique $f(x)$, de période 2π , peut être développée en série de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \text{ avec}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

I. Courbes approche-retrait en microscopie à force atomique

Le Microscope à Force Atomique est un palpeur local et ultra-sensible de force. Son principe est le suivant : une pointe fine, métallique ou isolante, se trouve à l'extrémité d'un bras de levier souple qui fait office de ressort. L'autre extrémité de ce bras est fixe. L'extrémité du bras portant la pointe est approchée de la surface, à étudier et interagit avec cette dernière. La force qui s'exerce entre la pointe et la surface provoque, en chaque point, une déflexion du bras, que l'on détermine à partir de la réflexion d'un faisceau laser.

Dans le fonctionnement dit en mode résonant, la pointe est excitée par une force périodique de fréquence proche de la fréquence de résonance du système bras-pointe. L'interaction pointe-surface perturbe le système, ce qui entraîne une variation de l'amplitude de vibration. L'ordre de grandeur de l'amplitude vibratoire peut varier dans de grandes proportions, de quelques dixièmes à quelques dizaines de nanomètres. La mesure de cette amplitude vibratoire lorsque la pointe balaye la surface donne accès à la topographie de la surface étudiée. À l'aide de céramiques piézoélectriques, le déplacement de la sonde au-dessus de la surface s'effectue avec une précision de l'ordre du nanomètre dans les trois directions de l'espace.

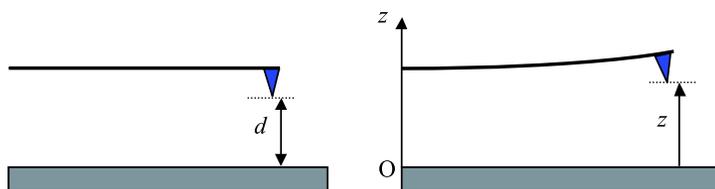


Figure 1. Schéma d'une sonde ; à gauche au repos, à droite en flexion

À titre d'information, les dimensions caractéristiques d'un levier sont : longueur de 100 à 200 μm , largeur de 20 à 30 μm et épaisseur de 1 à 5 μm . La pointe est conique, d'une hauteur de 5 à 20 μm ; l'angle d'ouverture du cône est de 20 degrés et le rayon de courbure de l'extrémité de l'ordre de 20 nm ; l'aire en regard de la surface à étudier est ainsi d'une centaine de nm^2 .

On suppose que le mouvement de la pointe s'effectue selon la direction verticale. Sa position est repérée par son altitude z ($z > 0$) à partir de la surface ; on note d la distance séparant la pointe de la surface lorsque la sonde est à l'équilibre *en l'absence de forces externes*.

I.1 Mouvement de la sonde loin de la surface

Loin de la surface, la sonde est modélisée par un oscillateur mécanique constitué d'une masse ponctuelle m soumise :

- à une force de rappel élastique $-k(z - d)$ avec $k > 0$,
- à un amortissement représenté par une force de frottement visqueux $-\lambda\dot{z}$, avec $\lambda > 0$,
- à une force d'excitation selon Oz, sinusoïdale, $f_z = f_0 \cos \omega t$.

I.1.1 Écrire l'équation du mouvement régissant le mouvement de cet oscillateur.

Dans la suite, on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$, $a_m = \frac{Qf_0}{m\omega_0^2}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

I.1.2 Déterminer les dimensions de Q , a_m et u .

I.1.3 En régime sinusoïdal permanent, la solution est de la forme $z(t) = d + a \cos(\omega t + \varphi)$, avec a réel positif. Déterminer l'amplitude $a(\omega)$; l'exprimer en fonction de a_m , Q et u .

Comment évolue le graphe de $a(\omega)$ en fonction de Q ?

I.1.4 Calculer la fréquence propre $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ pour $m = 5 \times 10^{-11}$ kg et $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Les valeurs typiques de Q sont de quelques centaines. On prendra $Q = 400$. Toute l'étude qui suit s'effectuant au voisinage de la résonance, on utilisera dans ce cas l'approximation :

$$a(\omega) \simeq \frac{a_m}{\sqrt{1 + Q^2(1 - u^2)^2}}.$$

I.2 Réponse près de la surface

Lorsque la sonde est rapprochée de la surface, elle est soumise à une force additionnelle verticale. Essentiellement due aux interactions de Van der Waals, elle est attractive et donnée

par $F(z) = -\frac{K}{z^2}$ où K est une constante positive qui dépend de la taille de la pointe et des matériaux en présence.

En effectuant l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, on adopte pour $F(z)$ la forme approchée suivante :

$$F(z) = A + B(z - d) + C(z - d)^2 + D(z - d)^3 \quad (1)$$

I.2.1 Expliciter les quatre coefficients du développement à l'aide de $F(z)$ et de ses dérivées.

On étudie tout d'abord l'effet des deux premiers termes de l'expression (1) et l'on effectue le changement de variable $Z = z - d$.

I.2.2 Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de la pointe.

I.2.3 Quel est l'effet du terme A sur les oscillations forcées de la sonde? Calculer l'amplitude de cet effet en fonction de K , k et d . L'évaluer numériquement pour $d = 15 \text{ nm}$ et $K = 5 \times 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{m}^2$.

I.2.4 Sur quelle caractéristique de l'oscillateur influe le terme B ? Évaluer numériquement cet effet avec les données précédentes.

I.2.5 Pour des amplitudes d'oscillation plus importantes, les termes non linéaires $C(z-d)^2$ et $D(z-d)^3$ de l'expression (1) ne sont plus négligeables. Mais, étant donné les valeurs élevées de Q , au voisinage de la résonance, l'oscillation forcée reste pratiquement sinusoïdale à la pulsation ω de la force excitatrice, soit $Z(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que ces termes non linéaires entraînent l'apparition d'harmoniques à des fréquences différentes de ω ; préciser ces fréquences.

I.3 Réponse non linéaire (fortes amplitudes)

On effectue maintenant une expérience d'approche-retrait : la pointe en vibration est rapprochée, puis éloignée de la surface. Les déplacements sont supposés être verticaux. On observe ainsi l'influence croissante, puis décroissante, des forces de surface d'un échantillon et l'on utilise ces données pour discerner les diverses contributions des forces en présence, selon leur dépendance avec la distance.

Dans ces expériences, l'amplitude d'oscillation est importante et la pointe s'approche très près de la surface. La forme approchée (1) n'est plus utilisable et il est nécessaire de prendre en compte l'expression "exacte" de la force d'interaction pointe-surface, soit $F(z) = -\frac{K}{z^2}$.

I.3.1 Écrire l'équation du mouvement de la pointe avec cette expression.

I.3.2 À d fixé, l'expérience montre que le mouvement de l'oscillateur demeure pratiquement harmonique, soit $Z(t) \simeq a \cos(\omega t + \varphi)$. Avec $z = d + Z(t)$, la force $F(z)$ est périodique en $\theta = (\omega t + \varphi)$ et décomposable en série de Fourier. On admettra que le terme fondamental en ω joue un rôle prédominant.

Expliciter ce terme à l'aide de K , d et a . On donne :

$$\text{Pour } 0 \leq b < 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \theta}{(1 + b \cos \theta)^2} d\theta = -\frac{b}{(1 - b^2)^{3/2}}.$$

I.3.3 En utilisant comme en **I.1.1** les notations $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$, $a_m = \frac{Qf_0}{m\omega_0^2}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, montrer que l'amplitude a et la distance d sont reliées, pour u fixé, par :

$$a^2 \left\{ Q^2 \left[1 - u^2 - \frac{2K}{k} \frac{1}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \right]^2 + u^2 \right\} = a_m^2.$$

I.3.4 On introduit les variables adimensionnées : $\tilde{a} = \frac{a}{a_m}$ avec $\tilde{a} \leq 1$, $\tilde{d} = \frac{d}{a_m}$ et $\beta = \frac{2K}{ka_m^3}$. Montrer que \tilde{d} s'exprime en fonction de \tilde{a} selon :

$$\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \left[\frac{\beta Q}{Q(1 - u^2) \pm \sqrt{1/\tilde{a}^2 - u^2}} \right]^{2/3} \quad (2)$$

Dans toute la suite, on remplacera $\sqrt{1/\tilde{a}^2 - u^2}$ par $\sqrt{1/\tilde{a}^2 - 1}$.

I.3.5 Calculer numériquement βQ avec les valeurs données précédemment soit $K = 5 \times 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $Q = 400$ et en prenant $a_m = 13,5 \text{ nm}$.

Dans toute la suite, on prendra $(\beta Q)^{2/3} = 0,04$.

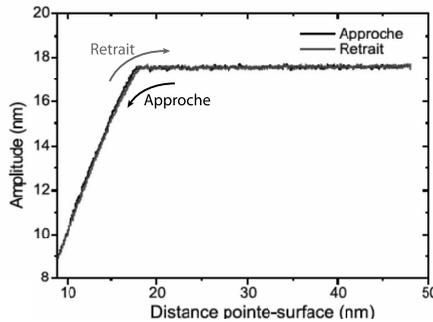


Figure 2. Courbes expérimentales d'approche-retrait pour $\omega = \omega_0$. Elles sont pratiquement confondues

La figure 2 montre une courbe d'approche-retrait, la pointe étant excitée à sa pulsation de résonance libre $\omega = \omega_0$, soit $u = 1$. L'expression (2) se met alors sous la forme :

$$\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \frac{0,04}{(1/\tilde{a}^2 - 1)^{1/3}} \quad (3)$$

I.3.6 Montrer que \tilde{d} est une fonction croissante de \tilde{a} . Préciser les valeurs limites de \tilde{a} pour $\tilde{d} \rightarrow 0$ et $\tilde{d} \rightarrow \infty$.

I.3.7 Calculer la valeur de \tilde{d} pour $\tilde{a} = 0,95$ ainsi que l'écart $(\tilde{d} - \tilde{a})$.

I.3.8 Le calcul numérique montre que $(\tilde{d} - \tilde{a})$ reste inférieur à 0,04 pour $0,2 < \tilde{d} < 0,99$. Dédurre de ces résultats que l'on peut modéliser simplement le graphe de $\tilde{a}(\tilde{d})$ à l'aide de deux portions de droites et en donner le tracé. Comment se compare-t-il au résultat expérimental de la figure 2 ?

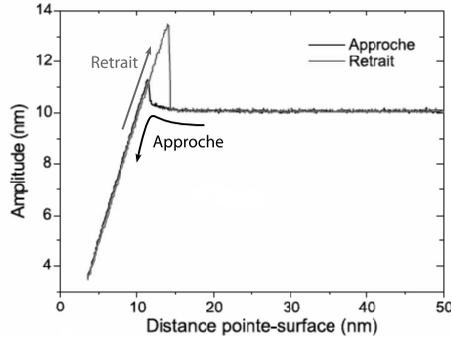


Figure 3. Courbes expérimentales d'approche-retrait pour $\omega < \omega_0$.
Approche : d décroissant régulièrement ; Retrait : d croissant régulièrement

Comme le montre la figure 3, dans certaines conditions expérimentales, les courbes approche-retrait présentent de l'hystérésis. Des sauts brusques de l'amplitude se produisent à des distances d différentes lors de l'approche et lors du retrait. L'excitation s'effectue alors à une fréquence très légèrement inférieure à celle de résonance libre, $\omega < \omega_0$ soit $u < 1$.

I.3.9 On choisit u pour avoir $Q(1 - u^2) = 0,9$; calculer la valeur de u .

I.3.10 Le graphe de $\tilde{a}(\tilde{d})$, comme celui de $\tilde{d}(\tilde{a})$, comporte deux branches, les branches \oplus et \ominus associées respectivement aux signes + et - du dénominateur du crochet de (2). Pour quelle valeur de \tilde{a} ces deux branches se rejoignent-elles ? Quelle est la valeur de \tilde{d} correspondante ?

I.3.11 Montrer que la branche \oplus correspond à une fonction $\tilde{d}(\tilde{a})$ monotone croissante. La situation est analogue à celle analysée en question **I.3.8**; le graphe de $\tilde{a}(\tilde{d})$ peut être modélisé simplement par un segment de droite que l'on précisera.

I.3.12 Pour la branche \ominus , calculer la valeur de \tilde{a} correspondant aux grandes distances \tilde{d} . Calculer la valeur \tilde{d}_1 de \tilde{d} correspondant à $\tilde{a} = 0,75$. En déduire l'allure du graphe de cette branche pour $\tilde{d} > \tilde{d}_1$.

I.3.13 Pour $\tilde{a} > 0,75$, le graphe de la branche \ominus est donné en figure 4. Rassembler sur un même dessin les graphes des deux branches. À l'aide de ce dessin, comment interprétez-vous le résultat expérimental de la figure 3 et l'hystérésis qui s'y manifeste ?

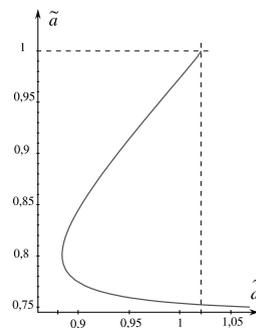


Figure 4. Branche \ominus ; graphe pour $\tilde{a} > 0,75$

II. Réflexion à la surface d'un dioptre plan

Deux milieux diélectriques transparents, d'indices n_1 et n_2 , sont séparés par le dioptre plan xOy , le milieu d'indice n_1 correspondant à $z < 0$ (figure 5).

Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω , de champ électrique $\vec{E}_i = E_i^0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$, arrive sous l'angle d'incidence θ_1 , ($0 < \theta_1 < \pi/2$) sur le dioptre, xOz étant le plan d'incidence. Elle donne lieu à une onde réfléchie, se propageant dans le milieu d'indice n_1 , de champ électrique $\vec{E}_r = E_r^0 \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$ et à une onde transmise dans le milieu d'indice n_2 , de champ électrique $\vec{E}_t = E_t^0 \cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$, avec les angles respectifs de réflexion θ'_1 et de réfraction θ_2 ($0 < \theta'_1 < \pi/2$ et $0 < \theta_2 < \pi/2$).

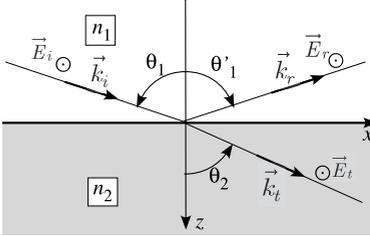


Figure 5.

Les coefficients de réflexion r et de transmission t pour les amplitudes sont donnés par :

$$r = \frac{E_r^0}{E_i^0} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} ; \quad t = \frac{E_t^0}{E_i^0} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} .$$

L'intensité énergétique moyenne d'une onde électromagnétique monochromatique de champ électrique $\vec{E} = E^0 \cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$, se propageant dans un milieu non absorbant d'indice n , est donnée par $I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n (E^0)^2$.

II.1 Réflexion – transmission en incidence rasante

Dans toute la partie II, l'indice n_2 reste très proche de l'indice n_1 . De plus l'incidence est quasi rasante et on pose $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ avec $0 < \varphi_1 \ll \pi/2$. On pose de même $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ avec $0 < \varphi_2 \ll \pi/2$ lorsqu'il y a transmission.

II.1.1 Montrer que dans ces conditions $r = \frac{E_r^0}{E_i^0} \simeq \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$ et $t = \frac{E_t^0}{E_i^0} \simeq \frac{2\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$ avec $t = 1 + r$.

II.1.2 Exprimer de même le rapport $\frac{I_t}{I_i}$ en fonction de φ_1 et φ_2 , en tenant compte de $n_2 \simeq n_1$.

II.2 Réflexion–transmission en régime non linéaire

On considère dorénavant que le milieu 2 est optiquement non linéaire : l'indice n_2 y dépend de l'intensité. On pose $n_2(I_t) = n_2(0) + \eta I_t = n_1 - \Delta + \eta I_t$, ce qui définit les constantes positives Δ et η . On suppose $\Delta, \eta I_t \ll n_1$, de sorte que n_2 reste toujours peu différent de n_1 .

II.2.1 On suppose d'abord l'intensité I_t faible, $n_2 \simeq n_2(0) = n_1 - \Delta$. Déterminer en fonction de n_1 et Δ l'angle d'incidence limite φ_c tel qu'il existe une onde transmise pour $\varphi_1 \geq \varphi_c$.

II.2.2 On suppose maintenant $0 < \varphi_1 < \varphi_c$ mais avec l'intensité I_t suffisamment forte pour avoir $n_2 > n_1$. Pour une incidence φ_1 donnée, quelle est la valeur minimale de $\eta I_i / \Delta$ pour qu'il y ait transmission d'une onde dans le milieu d'indice n_2 ? Expliciter cette valeur en fonction de φ_1 et φ_c .

Calculer cette valeur minimale pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$, $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

II.2.3 Exprimer n_2 en fonction de $n_1, \Delta, \varphi_1, \varphi_2, \eta$ et I_i .

II.2.4 Toujours pour $n_2 > n_1$, déduire de la loi de Descartes pour la réfraction la relation liant φ_1 et φ_2 et montrer qu'à l'ordre le plus bas en φ_1 et φ_2 , cette relation prend la forme :

$$\frac{\eta I_i}{\Delta} = \frac{1}{(1+r)^2} \left[1 - \frac{4r}{(1+r)^2} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_c} \right)^2 \right].$$

II.2.5 Tracer l'allure de la courbe $r = f\left(\frac{\eta I_i}{\Delta}\right)$ pour $0 \leq r \leq 1$ et dans chacun des cas suivants : $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$, $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

II.2.6 Quelles sont les valeurs de $\frac{\eta I_i}{\Delta}$ et de n_2 lorsque $r = 0$? Que se passe-t-il alors physiquement ?

II.3 Onde évanescente en régime non linéaire

On suppose maintenant que l'inégalité $n_1 > n_2$ est satisfaite, et on se place dans la situation où $0 < \varphi_1 \leq \varphi_c$ (angle d'incidence supérieur à l'angle limite). C'est la situation de réflexion totale en optique géométrique. La conservation des champs électrique et magnétique au passage du dioptre implique cependant qu'il existe une onde électromagnétique dans le milieu d'indice n_2 .

Le champ électrique est donné par : $\vec{E}_t = E_t^0 e^{-\beta z} \cos(\omega t - \kappa x + \phi) \vec{e}_y$ avec :

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{E_t^0}{E_i^0} \right)^2 = \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_1}{n_1^2 - n_2^2}.$$

II.3.1 On considère l'interface verre/CS₂. L'indice du verre est $n_1 = 1,63$; celui du CS₂ est $n_2 = n_1 - \Delta$, avec $\Delta = 1,0 \times 10^{-3}$. Calculer la valeur numérique de la profondeur de pénétration β^{-1} de l'onde électromagnétique transmise pour un angle d'incidence $\theta_1 = 88,6^\circ$ et pour une longueur d'onde de 694 nm (laser à rubis).

II.3.2 On tient compte à présent des effets optiques non linéaires dans CS₂. On se place toujours en incidence quasi-rasante : $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ et $0 < \varphi_1 \ll \pi/2$, mais avec I_t suffisamment faible pour avoir $n_2 < n_1$ donc réflexion totale. On pose toujours $n_2(I_t) = n_1 - \Delta + \eta I_t$, où I_t correspond au champ près du dioptre, soit E_t^0 .

Montrer que I_t vérifie l'équation du second degré :

$$I_t^2 - \frac{\Delta}{\eta} I_t + \frac{2n_1\varphi_1^2}{\eta} I_i = 0.$$

II.3.3 Que se passe-t-il physiquement lorsque $I_i > I_i^c$, où $I_i^c = \frac{1}{16} \frac{\Delta}{\eta} \left(\frac{\varphi_c}{\varphi_1}\right)^2$?

II.3.4 On fixe la valeur $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$. Tracer le graphe $r = f\left(\frac{\eta I_i}{\Delta}\right)$ lorsque I_i croît de 0 à I_i^c . En reprenant les résultats des questions **II.2.5** et **II.2.6**, tracer sur le même dessin la courbe $r = f\left(\frac{\eta I_i}{\Delta}\right)$ lorsque I_i décroît de I_i^c à 0.

Comment ces courbes sont-elles modifiées pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

II.3.5 Le coefficient η pour CS_2 vaut $3 \times 10^{-14} \text{ W}^{-1} \cdot \text{cm}^2$. Calculer I_i^c pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$. Comment peut-on obtenir une telle intensité ?

II.3.6 La figure 6 représente la variation du coefficient de réflexion en intensité $R = |r|^2$ de l'interface verre- CS_2 en fonction de l'intensité incidente, exprimée en unités arbitraires. Les points noirs sont obtenus en augmentant l'intensité incidente, les cercles ouverts en la diminuant. Commenter cette courbe. Quelle application de ce phénomène peut-on envisager ?

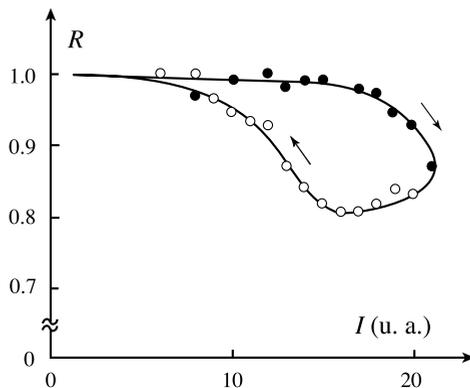


Figure 6. Coefficient de réflexion fonction de l'intensité

* *
*