ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude spectrale d'un opérateur de transfert

Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.

Soit C^0 l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui sont continues et $1-$périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,,\, x \in \mathbf{R}\}.$$

On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbf{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de C^0 engendré par e_0.

Si $f \in C^0$ on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right).$$

L'objet du problème est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de C^0. On mettra notamment en évidence sur certains de ces espaces la propriété de « trou spectral » : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r.

I Préliminaires

1) Montrer que si f appartient à C^0 alors Tf aussi.

2) Montrer que pour tout élément f de C^0 on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ puis que

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty = 1.$$

On appelle H^0 l'hyperplan de C^0 des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

3) Montrer que H^0 est stable par T.

4) Expliciter la projection P sur D parallèlement à H^0.

II Fonctions trigonométriques

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à C^0. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace de C^0 engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \cdots, e_n, e_{-n}$.

5) Déterminer Te_k (respectivement Pe_k) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont $T-$stables (respectivement P-stables).

On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).

6) Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

7) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geqslant k$, l'identité suivante :
$$T_n^p = P_n.$$

8) Calculer les coefficients de Fourier de Tf en fonction de ceux de f pour tout $f \in C^0$.

9) Déterminer le noyau de T.

III Fonctions höldériennes

On rappelle que pour tous les réels x et y,
$$|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle C^α le sous-espace de C^0 des fonctions f telles que
$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \middle/ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\} \text{ soit majoré.}$$

On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \Big/ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$

On admettra que

$$\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$$

définit une norme sur C^α.

10) Montrer que C^α est stable par T.

On note T_α l'endomorphisme de C^α induit par T.

11) Montrer que pour tout $f \in C^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha$ puis que $\sup_{\|f\|_\alpha = 1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On pose, pour tout réel x,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}(x).$$

12) Montrer que la série de fonctions $\sum_k \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $f_\lambda \in C^0$.

On admettra, que dans ce cas, la suite $(S_n,\ n \geqslant 0)$ converge dans l'espace vectoriel $(C^0,\ \|\ \|_\infty)$ vers f_λ :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f_\lambda\|_\infty = 0.$$

13) Montrer qu'alors $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Est-ce que λ est une valeur propre de T ?

14) Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que

$$2^{-n-1} < |x-y| \leqslant 2^{-n}.$$

En considérant séparément les sommes avec $k \leqslant n$ et $k > n$ dans la série ayant pour valeur $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in C^\alpha$.

15) Montrer que T_α laisse invariant $H^\alpha = H^0 \cap C^\alpha$.

16) Soit $f \in C^0$, montrer que

$$T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}).$$

17) Établir, pour $f \in C^\alpha$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t| \leqslant 2^{-n\alpha} m_\alpha(f).$$

18) Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n f\|_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha.$$

19) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).

Fin du problème