Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière PC

Les calculatrices sont autorisées.

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} .$$

Les parties I et II traitent d'un exemple. Les parties III, IV et V, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I.A.2) On pose :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$$

Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geq 2$, et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p \geq 2$.

I.B - Soient q un entier ≥ 2 et N un entier naturel ≥ 1.

Donner une majoration du reste

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

II.A -

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p), (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier p on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$$

II.A.2) Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p.

II.A.3) Montrer que : $\forall p \geq 2$, $b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4) Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3$ et 4.

II.B - On désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel N suffisant pour que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ soit inférieur à } \varepsilon.$$

II.B.2) Donner un majorant simple de :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à ε près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

Partie III - Séries factorielles

III.A -

III.A.1) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x},\ w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right),\ \text{définie pour } n \geq 1,\ \text{est convergente.}$$

III.A.2) En déduire qu'il existe $l(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).$$

III.B - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC.

III.C - On désigne désormais par $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Soit $a = (a_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathscr{A}$, montrer que :

III.C.1) la fonction f_a définie par :

$$x \mapsto f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

III.C.2) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

III.D -

III.D.1) Donner un exemple d'un élément a de $\mathscr{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

III.D.2) Donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui ne soit pas un élément de $\mathscr{A}$.

III.E - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

III.E.1) Montrer que, pour tout entier n la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \,,\; |u'_n(x)| \leq u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right)$$

III.E.2) En déduire que la fonction f_a est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

N.B. On dira alors que la fonction f_a est développable en série factorielle (sous-entendu ici sur $]0, +\infty[$ et en abrégé DSFA) et on admettra qu'un tel développement est unique.

Partie IV - Représentation intégrale

IV.A -

IV.A.1) Soit n un entier naturel. On pose :

$$\forall k = 0 \ldots n \,,\; P_k = \prod_{i = 0, i \neq k}^{n} (X + i) \,.$$

Montrer que les polynômes P_k forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

IV.A.2) En déduire qu'il existe des rationnels indépendants de x notés $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ tels que :

$$\forall x > 0 \,,\; \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k} \,.$$

Exprimer α_k en fonction de k et n.

IV.B - Montrer, pour $x > 0$ et k entier naturel, l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} dy$$

et calculer sa valeur en fonction de k et x.

IV.C - Montrer que :

$$\forall x > 0 \,,\; \forall n \in \mathbb{N} \,,\; \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \,.$$

En déduire que, pour tout élément a de $\mathscr{A}$, on a :

$$\forall x > 0 \,,\; f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy \,.$$

IV.D - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

IV.D.1) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On note ϕ_a la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n .$$

IV.D.2) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy$ est définie sur $]0, +\infty[$, DSFA sur ce même intervalle et égale à f_a.

Partie V - Dérivabilité d'une série factorielle

V.A - On reprend les notations des parties III et IV.

V.A.1) Montrer que la fonction $x \mapsto f_a(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \,,\; f'_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y) dy .$$

V.A.2) Montrer que la fonction $\psi_a \,:\, y \mapsto \phi_a(y) \ln(1-y)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

V.A.3) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \,,\; b_n = \frac{\psi_a^{(n)}(0)}{n!} .$$

Vérifier que $b_0 = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \,,\; b_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p} .$$

V.B - Soient $x > 0$ et $N \geq 1$. Montrer :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \right) .$$

V.C - Montrer que, pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq N-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x} .$$

V.D - Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{(p+1)^x}.$$

V.E - En déduire que la série de terme général $\dfrac{b_n}{(n+1)^x}$ est AC pour $x > 0$.

V.F - Montrer enfin que la fonction f'_a est DSFA sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(x).$$

V.G - Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ est DSFA sur $]0, +\infty[$ et calculer les coefficients notés a'_n et a''_n pour les fonctions f' et f'' pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Vérifier qu'on retrouve ainsi les calculs faits en seconde partie.

••• FIN •••