



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

## MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on note  $F$  la fonction sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad F(x, z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right),$$

et  $f$  la fonction sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

### PARTIE I

**I.1.** Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe fixé, quelconque.

**I.1.1.** Ecrire les développements en série entière de la variable réelle  $x$  des fonctions  $x \mapsto \exp(-zx)$  et  $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

**I.1.2.** A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que l'on peut écrire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z)x^n,$$

où  $A_n$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit la fonction polynomiale  $H_n$  par  $H_n = (-1)^n n! A_n$ .

Donner les expressions de  $H_0(z)$  et de  $H_1(z)$  en fonction de  $z$ .

**I.1.3.** Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto F(x, z)$  à l'aide de  $F$ .

En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$  on a  $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$ .

Donner les expressions de  $H_2(z)$ ,  $H_3(z)$  et  $H_4(z)$  en fonction de  $z$ .

**I.2.**

**I.2.1.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$ .

En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$ .

**I.2.2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $K_n = \frac{(-1)^n}{f} \left( \frac{d^n f}{dx^n} \right)$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$ .

Exprimer  $K_0(x)$  et  $K_1(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire que  $H_n = K_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**I.3.**

**I.3.1.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$ .

**I.3.2.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$ .

**I.4.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit la fonction  $\varphi_n$  de la variable réelle  $x$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x)$ , où  $\lambda_n$  est un nombre réel que l'on déterminera.

**I.5.** Pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  on pose :

$$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx = (-1)^{p+q} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)dx.$$

**I.5.1.** Montrer que l'intégrale  $I_{p,q}$  est bien définie pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

On admettra désormais que  $I_{0,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$ .

**I.5.2.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  un couple de nombres entiers. À l'aide d'une intégration par parties dûment justifiée, montrer que  $I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$ .

En déduire la valeur de  $I_{p,q}$  pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . On distinguera les cas  $q \neq p$  et  $q = p$ .

**PARTIE II**

Soit  $\hat{f}$  la fonction de la variable réelle  $\nu$  définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)dt.$$

**II.1.** Montrer que  $\hat{f}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

**II.2.** Montrer que  $\hat{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**II.3.**

**II.3.1.** Montrer que  $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$  pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$ .

On pourra par exemple, entre autres méthodes, utiliser l'égalité  $-t = 2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t)$ .

**II.3.2.** Calculer  $\hat{f}(0)$ . En déduire l'expression de  $\hat{f}(\nu)$  en fonction de  $\nu$ .

### PARTIE III

On considère la série de fonctions de terme général  $u_n$  défini par :

$$u_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $U_n$  la fonction définie par  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

On remarquera que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $U_n(x) = \sum_{k=-n}^n f(x - 2k\pi)$ .

**III.1.** Soit  $A$  un nombre réel strictement positif.

**III.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq \frac{A}{2\pi}$ . Etudier les variations sur le segment  $[-A, +A]$  des fonctions  $x \mapsto f(x - 2n\pi)$  et  $x \mapsto f(x + 2n\pi)$ .

En déduire que pour tout  $x \in [-A, +A]$ , on a  $0 \leq u_n(x) \leq 2 \exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$ .

**III.1.2.** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge normalement sur  $[-A, +A]$ .

**III.2.**

**III.2.1.** Déduire de la question précédente que la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  tout entier. On note  $U$  sa somme.

**III.2.2.** Montrer que  $U$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On admettra que  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**III.2.3.** Montrer que  $U$  est paire.

**III.2.4.** Exprimer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $U_n(x + 2\pi)$  au moyen de  $U_n(x)$ ,  $f(x + 2(n + 1)\pi)$  et  $f(x - 2n\pi)$ . En déduire que  $U$  est périodique de période  $2\pi$ .

**III.3.** Soit  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$  la série de Fourier de  $U$ .

**III.3.1.** Justifier l'égalité de  $U$  avec la somme de sa série de Fourier.

**III.3.2.** Montrer que l'on a  $\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos nx \, dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**III.3.3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , justifier l'égalité  $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx$ .

En déduire que  $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \, dx$ .

**III.3.4.** Déduire de ce qui précède une expression de  $a_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , à l'aide de  $\hat{f}$  et de  $n$ , puis exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ .

**Fin de l'énoncé**