

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

### Notations

On note  $E$  l'espace vectoriel normé des applications continues du segment  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  muni de la norme  $f \mapsto \|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(x)|$  et  $L(E)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans lui-même. Soient  $v$  un élément de  $L(E)$  et  $f$  un élément de  $E$  ; l'image de  $f$  par  $v$  est notée  $vf$ . L'espace  $L(E)$  est muni de la norme  $v \mapsto \|v\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|v(f)\|$ .

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant  $E$  dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, dans les deux premières parties, on met en place les outils nécessaires à cette étude.

### Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée  $\Gamma$  est la fonction réelle définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par la formule suivante :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et pour tout entier naturel  $k$  et tout nombre réel  $x > 0$ ,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

De plus, pour tout  $x > 0$ , cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Comme  $\Gamma(1) = 1$ , il en découle que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

## **Partie I - Questions préliminaires**

- I.1) Montrer qu'il existe un réel  $c$  de l'intervalle  $]1, 2[$  tel que  $\Gamma'(c) = 0$ .  
 I.2) En déduire que la fonction  $\Gamma$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ .  
 I.3) Montrer que, pour tout nombre réel  $\gamma > 0$ ,  

$$\gamma^x = o(\Gamma(x)) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

## **Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence**

II.A - Soit  $\phi$  une application continue de l'intervalle  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . On suppose de plus qu'il existe un nombre réel  $t_0 \geq 0$  tel que la fonction  $\phi$  soit décroissante sur l'intervalle  $[t_0, +\infty[$ .

II.A.1) Établir que la fonction  $\phi$  est positive sur l'intervalle  $[t_0, +\infty[$ .  
 (On pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit  $h$  un nombre réel strictement positif.

a) Prouver que pour  $n$  suffisamment grand,  $0 \leq h\phi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$ .

b) Montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$  converge.

II.A.3) Prouver que :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t) dt.$$

(On pourra introduire un nombre réel  $a$  suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{a}{h} \rfloor} h\phi(nh) + \sum_{n=\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où  $\lfloor \frac{a}{h} \rfloor$  désigne la partie entière du nombre réel  $\frac{a}{h}$ ).

**II.B** - Pour tout nombre réel  $\alpha > 0$ , on note  $g_\alpha$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par la formule  $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$ .

II.B.1) Vérifier que la fonction  $g_\alpha$  satisfait aux conditions du II.A.  
En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha).$$

II.B.2) On considère la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n$ .

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note  $S_\alpha$  la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque  $x$  tend vers 1 avec  $x < 1$ , alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

### Partie III - La première fonction eulérienne

**III.A** -

III.A.1) Établir que, pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de nombres réels strictement positifs, la fonction  $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

Pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt.$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de réels strictement positifs, les relations suivantes :

$$(i) \quad B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

$$(ii) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$

(on pourra utiliser le changement de variable  $u = \frac{t}{1+t}$ .)

$$(iii) \quad B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$$

**III.B** - On se propose d'établir pour tout réel  $\alpha > 0$  et tout réel  $\beta > 0$  la formule suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement supérieurs 2.

III.B.2) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier  $n$  strictement positif, on pose :

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction  $\psi_{\alpha, \beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$  est lipschitienne sur le segment  $[0, 1]$ .

On note  $A_{\alpha, \beta}$  un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1], |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta} |x - y|.$$

b) Prouver que, pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$|u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}.$$

c) On reprend les notations de la question (II.B.2).

Établir que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  :

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n.$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq x < 1$ ,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En utilisant le comportement des fonctions  $(S_\gamma)_{\gamma>0}$  au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta).$$

### III.C - Formule des compléments

III.C.1) Établir que la fonction  $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$  est continue sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

III.C.2) Soient  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $0 < p < q$ .

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt.$$

b) Pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $q - 1$ , on note :

$$z_k = e^{i \frac{2k+1}{2q} \pi}.$$

Établir que :

$$(*) \quad \frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \frac{1}{X - z_k} - \frac{1}{X + z_k} \right).$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe  $c$  de partie imaginaire non nulle, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( (t - \operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 \right) + i \arctan \left( \frac{t - \operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} \right)$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t - c}$ , prouver en utilisant judicieusement la relation (\*) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin \left( \frac{2p+1}{2q} \pi \right)}.$$

III.C.3) Dédurre de (III.C.1) et (III.C.2) que :

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

## **Partie IV - L'opérateur d'Abel**

Dans toute cette dernière partie, on suppose que  $\alpha$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ .

### **IV.A -**

IV.A.1) Établir que pour toute fonction  $f$  de  $E$  et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, 1[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)}{(x - t)^\alpha}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, x[$ .

IV.A.2) Pour tout élément  $f$  de  $E$ , on note  $A_\alpha f$  la fonction définie sur le segment  $[0, 1]$  par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad \text{si } 0 < x \leq 1.$$

a) Vérifier que, pour tout  $f$  élément de  $E$  et tout réel  $x$  du segment  $[0, 1]$ ,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt.$$

b) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ , la fonction  $A_\alpha f$  est une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$ .

c) Établir que l'application  $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $E$  et que :

$$\| \|A_\alpha\| \| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

IV.B - On définit la suite  $(A_\alpha^n)_{n \geq 0}$  par la condition initiale  $A_\alpha^0 = id_E$  (application identité de  $E$ ) et, pour tout  $n \geq 0$ , par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n.$$

IV.B.1) On pose  $\beta = 1 - \alpha$ .

a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout  $f$  élément de  $E$  et pour tout  $x$  du segment  $[0, 1]$  établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

b) En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_\alpha^n$  est un endomorphisme continu de  $E$  et que :

$$\| \|A_\alpha^n\| \| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif  $\gamma$ , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient  $\lambda$  un nombre complexe non nul et  $f$  un élément de  $E$ .

a) Prouver que la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$ .

On note  $g$  la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f.$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe  $\lambda$  non nul, l'opérateur  $id_E - \lambda A_\alpha$  est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$  désigne l'application  $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$ .

IV.C - Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $e_n$  la fonction monômiale  $t \mapsto t^n$ .

IV.C.1) Soit  $n$  un entier naturel.

a) Calculer  $A_\alpha e_n$ .

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}.$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur  $P$  défini sur  $E$  par la formule suivante :

$$\forall x \in [0, 1], Pf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P e_n.$$

Établir que pour toute fonction polynômiale  $\psi$ ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P\psi.$$

## IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme  $P$  est un endomorphisme continu de  $E$  tel que :

$$\|P\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Pf\| = 1.$$

b) On pose  $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ . Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P.$$

c) Soit  $D$  l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  associe sa dérivée.

Montrer que  $D \circ B_\alpha$  est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E.$$

d) En déduire que l'opérateur  $A_\alpha$  est injectif.

---

••• FIN •••

---