CONCOURS COMMUN 2008
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 20 mai 2008 de 8h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.
Barème indicatif : 10 points pour chaque problème.

Premier problème

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, au point M de coordonnées (x, y) on associe l'affixe $m = x + iy$.
Le conjugué de z est noté $\overline{z}$, son module $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, et sa partie réelle $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
On note $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ le complexe solution de $X^2 + X + 1 = 0$, et on rappelle que $\overline{j} = j^2$.

Etude d'une inégalité

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| = \operatorname{Re}(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.

2. Soit $z, w \in \mathbb{C}$, montrer l'égalité suivante : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2\left(|z\overline{w}| - \operatorname{Re}(z\overline{w})\right)$.

3. En déduire l'inégalité suivante : $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ et montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, z et w sont les affixes de deux points situés sur une même demi-droite issue de l'origine.

La notion de $(p : q)$ point

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
Soient p et q deux réels strictement positifs.

4. Pour $A \neq B$, montrer qu'il existe un unique point d'affixe z vérifiant $\dfrac{z - a}{b - z} = \dfrac{p}{q}$, on l'appelle le $(p : q)$ **point** de A à B. Donner son affixe ainsi qu'une interprétation géométrique.

5. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$, montrer que le $(p : q)$ **point** de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$ **point** de A à B coïncident.

6. Caractériser le $(1 : 1)$ **point** de A à B.

7. A, B, C désignent trois points distincts deux à deux, on notera c l'affixe de C. Soient X le $(p:q)$ **point** de A à B et Y le $(p:q)$ **point** de A à C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).

La notion de $(p:q)$ sous-triangle

On appelle $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$, le triangle $\Delta(A'B'C')$ où
A' est le $(p:q)$ **point** de A à B d'affixe a',
B' est le $(p:q)$ **point** de B à C d'affixe b',
C' est le $(p:q)$ **point** de C à A d'affixe c'.

8. Donner l'affixe de l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle $\Delta(ABC)$.

9. Montrer que le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$ a le même isobarycentre que $\Delta(ABC)$.

Etude de suites

On va considérer une suite de triangles $\Delta(A_kB_kC_k)$ construits de la manière suivante.
Le triangle $\Delta(A_0B_0C_0)$ est fixé (les points deux à deux distincts). Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1})$ est le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(A_kB_kC_k)$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, par a_k, b_k et c_k les affixes respectives des points A_k, B_k et C_k.

10. Montrer que les affixes vérifient la relation matricielle suivante : $\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$.

11. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$, $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$. Vérifier que les suites $(\alpha_k)_k$, $(\beta_k)_k$ et $(\gamma_k)_k$ sont géométriques de raison 1, $\dfrac{q+j^2p}{p+q}$ et $\dfrac{q+jp}{p+q}$ respectivement, et qu'elles sont toutes convergentes en précisant leur limite. (On pourra utiliser la question **3.**.)

On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on va prouver que V est inversible, et préciser son inverse.

12. Soit $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = BQ$. Comment se déduit la matrice C de la matrice B ?

13. Montrer que le déterminant de V vaut $3j(j-1)$. Montrer que V est inversible. Calculer V^2, en déduire que V^{-1} est de la forme $\frac{1}{m}VQ$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ à préciser.

14. En remarquant que $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$, en déduire que les suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ sont toutes les trois convergentes, et préciser leur limite.

Etude d'une application linéaire

On définit l'application suivante : $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \\ & M & \longmapsto & V^{-1}MV \end{array}$

15. Montrer que φ est une application linéaire qui vérifie $\forall (M,N) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})^2$, $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

16. On considère l'application ψ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $\psi(M) = VMV^{-1}$. Calculer $\psi \circ \varphi$. Montrer que φ est une application bijective.

17. On pose $A_{(p,q)} = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}$. Calculer $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \dfrac{q+jp}{p+q}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, et donner une expression similaire pour $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

18. En déduire, sans calcul, que $\varphi(A_{(p,q)}) = D$ où D est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

19. On rappelle que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est un anneau commutatif, en déduire que deux matrices quelconques de l'ensemble $\left\{A_{(p,q)}/(p,q) \in]0,+\infty[\right\}$ commutent.

20. Montrer que $A_{(1,n)} \dots A_{(1,2)}A_{(1,1)} = VD_nV^{-1}$ où D_n est une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1})$. Montrer que les suites $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right)_n$ et $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right)_n$ sont convergentes vers 0. (On pourra admettre que $\left|1+\frac{j}{k}\right| \leqslant 1$ et $\left|1+\frac{j^2}{k}\right| \leqslant 1$.)

Deuxième problème

Etude d'une fonction

21. Etudier sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.

22. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f. Préciser la valeur de f en 0.

23. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

24. Montrer que f est une bijection de $]0, \mathrm{e}]$ sur $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.

25. La fonction réciproque de f est-elle continue, dérivable sur $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$?

Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_n$ de la manière suivante

$$t_0 = 1, \qquad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la suite $(t_n)_n$ est convergente on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

26. Si $x = 1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$?

27. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite $(t_n)_n$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $\underline{x > 1}$:

28. Montrer que pour $x \in]1,+\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

29. Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

30. On suppose que $x \in]1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire que dans ce cas la suite $(t_n)_n$ est convergente.

31. On suppose $x > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, et on veut montrer que la suite $(t_n)_n$ a pour limite $+\infty$. On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions **27.** et **21.** aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas $\underline{x \in]0,1[}$:

32. Montrer que pour $x \in]0,1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?

33. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

34. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_n$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_n$ est croissante.

35. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0,1]$.

Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$. Pour cela on pose $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$, on admettra le résultat suivant :

$$g'(t) = \Phi_x'(t).\left(\Phi_x' \circ \Phi_x\right)(t) - 1 = (\ln x)^2.\Phi_x(t).\left(\Phi_x \circ \Phi_x\right)(t) - 1$$

36. Dans le cas $x \in [\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1[$ on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	↘	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x		$x^x - 1$

Préciser le signe de $g'(0)$. Quelle est la monotonie de g sur $[0,1]$? Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0,1]$. Conclusion pour la convergence de la suite $(t_n)_n$.

37. Dans le cas $x \in]0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[$ on admet que l'on a le tableau suivant :

t	0		α		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	↗	β	↘	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x				$x^x - 1$

où α est l'unique racine de g'' sur $]0,1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-1}\ln x - 1$. Préciser le signe de β lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[$. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[$?

38. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[$. Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

t	0		γ		α		δ		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1 < 0$	↗	0	↗	$\beta > 0$	↘	0	↘	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1 < 0$
$g(t)$	x	↘	$g(\gamma)$	↗		↗	$g(\delta)$	↘	$x^x - 1$

avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que Φ_x possède un unique point fixe dans $]0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[$ que l'on note p, donc $\Phi_x(p) = p$. Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$. En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p, p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_2 \leqslant t_{2n}$, et que la suite $(t_{2n})_n$ est convergente vers p_2.

40. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $t_{2n+1} \leqslant p$. Pour cela, on supposera qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p < t_{2n_0+1}$ et on aboutira à une contradiction. Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_n$? La suite $(t_n)_n$ est-elle convergente ?