ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2008 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Répartition modulo 1 de suites de nombres réels

Première partie

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Montrer que M possède une unique valeur propre réelle λ, et que λ est comprise entre 1 et 2.

2. Soit σ une valeur propre complexe, non réelle, de M. Calculer $\lambda\,|\sigma|^2$ et comparer les réels $|\sigma|$, 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3.a) Montrer que I, M et M^2 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

3.b) Calculer M^3 et l'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients entiers de I et M.

3.c) En déduire qu'il existe deux entiers α et β tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M^{n+3} = \alpha M^{n+1} + \beta M^n$. (Par convention $M^0 = I$ et $M^1 = M$.)

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}(M^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$.

4.a) Pour $0 \leqslant n \leqslant 10$, calculer u_n et v_n.

4.b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique, et préciser sa période.

4.c) Montrer que la suite $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $w_k = \sum_{n=0}^{k} v_n$ n'est pas bornée.

5.a) Exprimer u_n en fonction de λ, σ et n.

5.b) La suite $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $y_k = \sum_{n=0}^{k} \cos(\pi\lambda^n)$ est-elle bornée ?

Dans la suite du problème, on note φ la fonction périodique de période 1 qui à tout nombre réel $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ associe $|x|$.

Deuxième partie

6. Soient α et β deux nombres réels tels que $1 \leqslant \alpha < \beta$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{I}_n = \displaystyle\int_\alpha^\beta \cos(2\pi x^n)\, dx$.

6.a) On suppose dans cette seule question 6.a) que, pour tout x de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\varphi(x^n)) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}_n = \beta - \alpha$.

6.b) À l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties, déterminer la limite de la suite $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ quand n tend vers l'infini.

6.c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

Troisième partie

7.a) Calculer les coefficients de Fourier $(c_q(\varphi))_{q\in\mathbf{Z}}$ de la fonction φ.

7.b) En déduire que, pour $q > 0$, on a $|c_q(\varphi)| \leqslant \dfrac{1}{2q(q+1)}$.

On note

$$S_p(\varphi)(x) = \sum_{q=-p}^{p} c_q(\varphi) e^{2\pi i q x}$$

la somme partielle d'indice p de la série de Fourier de la fonction φ.

8. Montrer que pour tout réel x et tout entier $p \geqslant 1$, on a

$$|\varphi(x) - S_p(\varphi)(x)| \leqslant \frac{1}{p}\,.$$

9. Montrer que le réel λ défini dans la question **1** n'appartient pas à $\mathbf{Q}$. [On pourra utiliser le fait que si u est un nombre rationnel positif non entier, on peut écrire u comme quotient de deux entiers strictement positifs a et b tels qu'aucun facteur premier de b ne divise a.]

10. Soit λ le réel défini dans la question **1**. Montrer que pour tout entier $q \neq 0$ et tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i q n \lambda}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\pi q \lambda)|}\,.$$

11. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n\lambda) - \frac{1}{4} \right| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{N} \sup_{1 \leqslant q \leqslant p} \frac{1}{|\sin(\pi q \lambda)|} \,.$$

12. Déduire de ce qui précède que la suite $(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n\lambda))_{N \in \mathbf{N}^*}$ a une limite que l'on précisera.

13. Le résultat de la question **12** reste-t-il valable si l'on remplace λ par un nombre irrationnel quelconque ?

* *
*