

Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Filière PC

**Notations**

- Dans ce problème,  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  désigne l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des suites de complexes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Pour  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$  représente l'espace vectoriel des suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formées de vecteurs de  $\mathbb{C}^k$ .
- On note  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées à  $k$  lignes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .
- Enfin, si  $M$  est une matrice,  ${}^tM$  désigne sa transposée.

**Question préliminaire**

Soit une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

On note  $e = \det(M)$ . On suppose  $e \neq 0$ .

- Calculer le produit matriciel

$$M \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- En déduire l'expression de la matrice  $M^{-1}$  en fonction de  $a, b, c, d, e$ .

**Partie I - Récurrences linéaires****I.A - Récurrences linéaires d'ordre 2**

On considère ici les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  pour lesquelles il existe des complexes  $a_1$  et  $a_0$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

I.A.1) Déterminer une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que pour tout entier positif  $n$ , on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

I.A.2) Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

I.A.3) On suppose que  $A$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et on note

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices  $Q$  inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que  $AQ = QD$ .

b) Exprimer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $Q$ ,  $Q^{-1}$ , des complexes  $\lambda_1, \lambda_2$  et de l'entier  $n$ .

I.A.4) On suppose maintenant que  $A$  admet une seule valeur propre  $\lambda$  et on note

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

a) Exprimer  $a_1$  et  $a_0$  en fonction de  $\lambda$ .

b) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $T$  et déterminer les matrices  $Q$  inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $Q$ ,  $Q^{-1}$ , du complexe  $\lambda$  et de l'entier  $n$ .

I.A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

- soit  $A$  admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;
- soit  $A$  admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.

**I.A.6) Deux exemples numériques**

Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :

- expliciter la matrice  $A$ ,
- donner une matrice de passage  $Q$  telle que  $T = Q^{-1}AQ$  soit d'une forme simple comme ci-dessus,
- en déduire  $X_n$  puis  $x_n$  en fonction de  $x_0, x_1$  et  $n$   
(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).

**a) Exemple 1**

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

**b) Exemple 2**

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

**I.B - Vers un ordre supérieur, à petits pas**

On note  $\Phi$  l'application qui à  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  élément de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  associe la suite des vecteurs

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  définie par  $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, les trois premiers termes de la suite  $\Phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$  sont  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ .

À tout polynôme unitaire de  $\mathbb{C}_3[X]$ ,

$$P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on associe le sous-espace  $\mathcal{R}_P$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  formé des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$ .

I.B.1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

I.B.2) Vérifier que  $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  est linéaire et injective. Est-elle surjective ?

I.B.3)

a) Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$ . Montrer que son image  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\Phi$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

b) Montrer que réciproquement, toute suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  pour laquelle on a  $X_n = A^n X_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est élément de  $\Phi(\mathcal{R}_P)$ .

I.B.4) Montrer que  $\Phi(\mathcal{R}_P)$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  engendré par les suites de vecteurs  $(A^n e_1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(A^n e_2)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(A^n e_3)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ .

En déduire la dimension de  $\mathcal{R}_P$ .

### I.C - Des exemples (quasi) numériques

On introduit ici quelques exemples de polynômes  $P(X)$  et on se propose d'étudier le comportement à l'infini des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{R}_P$ .

#### I.C.1) Exemple 1

On considère ici le polynôme : 
$$P(X) = X^3 - 2X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}.$$

a) Écrire la matrice  $A$  qui lui est associée. Justifier qu'elle est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

b) Choisir une valeur explicite simple de  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ . Après un calcul effectif des premiers termes de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , conjecturer la limite de cette suite de vecteurs.

c) Vérifier que  $Q^{-1}AQ = T$  où  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

d) Calculer  $T^2, T^3$  et  $T^4$ .

En déduire la valeur de  $T^{4p+k}$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

e) Exprimer pour tout entier naturel  $n$  le vecteur  $Y_n = Q^{-1}X_n$  en fonction de  $Y_0 = Q^{-1}X_0$ .

En déduire que les suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Phi(\mathcal{R}_P)$  et de  $\mathcal{R}_P$  convergent.

*Attention :  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas dans  $\Phi(\mathcal{R}_P)$ !*

#### I.C.2) Exemple 2

Dans cette question, on considère le polynôme : 
$$P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1.$$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A$  associée à  $P(X)$ .

b) En déduire que les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $\mathcal{R}_P$  sont périodiques et que, à toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $\mathcal{R}_P$ , on peut associer trois nombres complexes  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

**I.C.3) Exemple 3**

Dans cette question, on considère le polynôme :

$$P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)^2$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent deux nombres réels distincts.

a) Préciser la matrice  $A$  associée à ce polynôme.

b) On admet que  $Q^{-1}AQ = T$  avec  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 2\mu \end{bmatrix}$  et  $T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ .

En déduire que si le polynôme  $P$  admet une racine double, la matrice  $A$  qui lui est associée n'est pas diagonalisable.

c) À quelles conditions sur  $\lambda$  et  $\mu$  a-t-on chacune des propriétés suivantes :

- pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$ ?
- pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ?

## **Partie II - De la récurrence linéaire en général**

Cette partie aborde l'étude des systèmes d'équations de la forme

$$(\mathcal{H}) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n$$

dans lesquelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne un élément inconnu de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$  et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de matrices de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ .

Dans la suite de cette partie, la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est fixée et on lui associe la suite de matrices  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $P_0 = I_k$  (matrice unité d'ordre  $k$ ) et  $P_{n+1} = A_n P_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### **II.A - Résultats d'existence et d'unicité des solutions**

II.A.1) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une solution de  $(\mathcal{H})$ .

Exprimer  $X_n$  en fonction de  $X_0$  et de la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

II.A.2) Montrer que le système avec condition initiale

$$(\mathcal{H}_a) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_0 = a \end{cases}$$

admet une solution et une seule pour tout  $a \in \mathbb{C}^k$ .

II.A.3) On note  $S$  l'ensemble des solutions du système  $(\mathcal{H})$ .

a) Vérifier que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ .

b) On considère l'application

$$\Psi : S \rightarrow \mathbb{C}^k$$

telle que  $\Psi((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) = X_0$ .

Montrer que  $\Psi$  est isomorphisme.

En déduire que  $S$  est de dimension  $k$ .

c) En déduire que la famille des  $k$  solutions des  $k$  systèmes  $\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_0 = e_i \end{cases}$

(où  $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^k$ ) forme une base de l'ensemble  $S$  des solutions du système  $(\mathcal{H})$ .

## II.B - Étude d'un exemple

On considère ici le système  $X_{n+1} = A_n X_n$  dans lequel, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n = \begin{bmatrix} n+1 & 0 \\ n+2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

II.B.1) On introduit la notation suivante :

$$\forall n \geq 1, h_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p},$$

et  $h_0 = 0$ . Déterminer la matrice  $P_n$  en fonction de  $n$  et de  $h_n$ .

II.B.2) Expliciter les solutions  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  de ce système en fonction de  $n$  et de  $x_0, y_0$ .

II.B.3) Donner une base de l'espace des solutions du système.

II.B.4) Que peut-on dire du comportement à l'infini de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

## II.C - Problème avec condition initiale au temps $n_0$

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}^k$ ,  $k \geq 2$ . On se propose d'étudier le système avec condition initiale  $(\mathcal{H}_{n_0, a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_{n_0} = a \end{cases}$

II.C.1) On suppose que pour tout  $p \in [0, n_0 - 1]$  la matrice  $A_p$  est inversible et on considère  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ , une solution de  $(\mathcal{H}_{n_0, a})$ .

a) Exprimer d'une façon générale  $X_{n_0+p}$  (pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ) et  $X_{n_0-p}$  (lorsque  $1 \leq p \leq n_0$ ) à l'aide de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

b) Justifier que le système  $(\mathcal{H}_{n_0, a})$  admet une solution et une seule.

II.C.2) On suppose qu'il existe  $p \in [0, n_0 - 1]$  tel que  $A_p$  ne soit pas inversible.

- Le système  $(\mathcal{H}_{n_0, a})$  peut-il ne pas avoir de solution ?
- Le système  $(\mathcal{H}_{n_0, a})$  peut-il avoir plus d'une solution ?

## II.D - Équations avec second membre

Cette question aborde l'étude de systèmes de la forme

$$(\mathcal{G}) : X_{n+1} = A_n X_n + b_n \text{ ou de problèmes } (\mathcal{G}_{n_0, a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n + b_n \\ X_{n_0} = a \end{cases},$$

où  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne encore une suite de matrices de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  fixée,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $S(\mathbb{C}^k)$  fixée et  $n_0$  un entier supérieur ou égal à 1.

On suppose, de plus, que pour  $p \in [0, n_0 - 1]$ , les matrices  $A_p$  sont inversibles.

### II.D.1) Existence, unicité et calcul pratique

- Montrer que le problème  $(\mathcal{G}_{n_0, a})$  admet une solution et une seule pour tout élément  $a$  de  $\mathbb{C}^k$ .
- Écrire, dans le langage de calcul formel de son choix une procédure qui prend en arguments deux entiers naturels  $n$  et  $n_0$ , un vecteur  $a$ , et retourne le terme d'ordre  $n$  de la suite solution du problème  $(\mathcal{G}_{n_0, a})$ . Sont supposées données les fonctions  $n \rightarrow A_n, n \rightarrow b_n$ , dans une syntaxe adaptée au langage.

Dans ce qui suit, on suppose que **toutes** les matrices  $A_n$  sont inversibles et que :

$$((Z_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (Z_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (Z_n^k)_{n \in \mathbb{N}})$$

désigne une base quelconque de l'espace des solutions du système homogène  $(\mathcal{H})$ .

II.D.2) Prouver que pour  $p \in \mathbb{N}$  fixé,  $(Z_p^1, Z_p^2, \dots, Z_p^k)$  est une base de  $\mathbb{C}^k$ .

*indication : montrer que la famille est libre en observant que le problème*

$$\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_p = 0 \end{cases} \text{ n'admet qu'une solution.}$$

II.D.3) Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $Z_n$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  dont les  $k$  colonnes sont les vecteurs  $Z_n^1, Z_n^2, \dots, Z_n^k$ .

a) Montrer que si  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite quelconque de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$  il existe des suites de complexes  $(c_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (c_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ , telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_n = \sum_{i=1}^k c_n^i Z_n^i = Z_n \cdot {}^t [c_n^1 \quad \dots \quad c_n^k].$$

b) Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $C_n = {}^t [c_n^1 \quad \dots \quad c_n^k]$  la matrice colonne des composantes

du vecteur  $Y_n$  dans la base  $(Z_n^1, \dots, Z_n^k)$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \sum_{i=1}^k c_n^i Z_n^i$ .

Montrer que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de  $\mathcal{G}$  si et seulement si la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation suivante pour tout entier naturel  $n$  :

$$C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n.$$

### II.E - Un exemple

Reprenons la suite des matrices  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $A_n = \begin{bmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  et introduisons le

problème avec second membre :  $X_{n+1} = A_n X_n + b_n$  avec  $b_n = t \left[ \frac{1}{n+2}, -h_n \right]$ .

II.E.1) Expliciter une suite de matrices  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  construite comme dans la question précédente ainsi que la relation de récurrence matricielle  $C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n$  établie dans la question précédente.

II.E.2) On considère  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une solution du problème avec second membre vérifiant la condition

$$Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Donner une expression de  $C_n$  puis de  $Y_n$  en fonction de  $n, x_0$  et  $y_0$ .

---

● ● ● FIN ● ● ●

---