CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notations et objectifs

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)_n$ et de la norme associée notée $||\cdot||_n$.

Une matrice carrée réelle M sera dite positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et on notera dans ce cas $M \geqslant 0$. De même un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera dit positif si toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles et on notera aussi $X \geqslant 0$. L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, positives et symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des conditions pour lesquelles, étant donnés n nombres réels distincts ou non, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, il existe une matrice carrée réelle d'ordre n positive et symétrique admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est égal à $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - X)$.

Dans la première partie on considérera quelques exemples simples.

Dans la seconde, on montrera que si S est une matrice carrée réelle positive et symétrique de plus grande valeur propre α, alors α est positif, S admet pour la valeur propre α un vecteur propre positif et toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leqslant \alpha$.

La troisième partie, assez technique, permettra de connaître les valeurs propres d'une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre $n+p$ construite à partir de deux matrices A et B carrées réelles positives et symétriques d'ordres respectifs n et p dont on connaît les valeurs propres.

Enfin la dernière partie donnera des conditions suffisantes pour qu'il existe une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité, n réels donnés.

PARTIE I

I.1 Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs, distincts ou non, il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 **a)** Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres. Montrer que son polynôme caractéristique P est donné par $P(X) = X^2 - 1$.

b) En déduire une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1.

I.3 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres -1, 0 et 1.

I.4 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 1$ et 1.

I.5 Montrer qu'il n'existe aucune matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1$ et 0.

I.6 **a)** Pour a et b réels, on note H la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent tous a et les autres valent tous b. Déterminer les valeurs propres de H.

b) Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est-elle nécessairement positive ?

PARTIE II

II.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Établir les égalités :

a) $(X \mid Y)_n = {}^tXY = {}^tYX$.

b) ${}^tXSY = (X \mid SY)_n = (SX \mid Y)_n$.

c) $||PX||_n = ||X||_n$.

II.2 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \ , \ T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $(Z \mid T)_{n+p} = (X \mid Y)_n + (U \mid V)_p$.

b) Montrer que si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U, V orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) La réciproque est-elle vraie ?

Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S. On pose $\alpha = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$.

II.3 **a)** Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(DY \mid Y)_n \leqslant \alpha ||Y||_n^2$.

b) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{(SX \mid X)_n}{||X||_n^2} \leqslant \alpha$.

c) En utilisant une décomposition du vecteur X sur une base orthonormée de vecteurs propres de S, montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si X est vecteur propre de S associé à la valeur propre α.

II.4 Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid ||X||_n = 1\}$ et $C = E \cap \Sigma$.

a) Montrer que E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Soit $\varphi\ :\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ X \longmapsto (SX \mid X)_n$. Donner l'expression de $\varphi(X)$ en fonction des coefficients de S et de ceux de X ; en déduire que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) On pose $\mu = \sup\limits_{X \in C} \varphi(X)$. Justifier l'existence de μ et montrer qu'il existe X_0 appartenant à C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

e) Montrer que $\mu \leqslant \alpha$.

II.5 On suppose dans cette question $S \geqslant 0$.

a) Si $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α, on pose $W = (|x_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

i) Montrer que W est élément de C.

ii) Montrer que $|\varphi(X)| \leqslant \varphi(W)$.

iii) Montrer que $|\alpha| \leqslant \mu$.

b) En déduire $\alpha \geqslant 0$, puis que la matrice S admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\lambda_i| \leqslant \alpha$.

PARTIE III

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, A, B deux matrices symétriques réelles d'ordres respectifs n et p, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de B et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ les réels tels que :

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ AX_i = \alpha_i X_i \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, p\}\ ,\ BY_j = \beta_j Y_j$$

Pour tout réel s, on note M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée sous forme de blocs par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1{}^tY_1 \\ sY_1{}^tX_1 & B \end{pmatrix} \tag{1}$$

et on considère les vecteurs $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ définis par $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les vecteurs $(T_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ définis par $T_j = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix}$.

III.1 Montrer que $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ et $T_2, T_3, \ldots, T_p$ sont vecteurs propres de M_s et préciser les valeurs propres correspondantes.

III.2 Pour θ réel, on note $V(\theta)$ le vecteur défini par $V(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos\theta) X_1 \\ (\sin\theta) Y_1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $V(\theta)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

b) Déterminer le spectre de M_0.

c) On suppose dans cette question $s \neq 0$. On note θ_1 l'unique réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan\theta_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$$

et on pose $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{2}$.

i) Montrer que θ_1 est non nul.

ii) Évaluer le produit $(\tan\theta_1)(\tan\theta_2)$.

iii) Montrer que θ_1 et θ_2 vérifient l'équation :

$$\alpha_1 + s\tan\theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta} \tag{2}$$

iv) En déduire que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont vecteurs propres de M_s et exprimer les valeurs propres correspondantes μ_1 et μ_2 en fonction de α_1, β_1 et s.

v) Montrer que les vecteurs $V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, Z_3, \ldots, Z_n, T_2, T_3, \ldots, T_p$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+p}$ et donner l'ensemble des valeurs propres de M_s.

vi) Montrer que les formules exprimant μ_1 et μ_2 en fonction de α_1, β_1 et s donnent encore des valeurs propres de M_s lorsque $s = 0$.

PARTIE IV

Dans cette partie on se propose de démontrer par récurrence la propriété (P_n) suivante : si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \geqslant 0$$

alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

IV.1 Vérifier que (P_1) est vraie.

IV.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_n) soit vraie et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geqslant 0$$

On pose $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $a, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient valeurs propres de A. Dans la suite de cette question **IV.2**, A désignera une telle matrice.

b) Montrer que A admet un vecteur propre X_1 unitaire et positif associé à la valeur propre a.

c) Pour s réel, soit M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s\,{}^tX_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Vérifier que M_s est bien de la forme (1) : préciser p, B et Y_1.

ii) En déduire les valeurs propres de M_s.

iii) Montrer que si $s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_{n+1}}$, les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ et conclure.

IV.3 Exemple

a) Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Déterminer une matrice B carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4, admettant pour valeurs propres $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.

Fin de l'énoncé