ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2008

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Équations différentielles de Sturm-Liouville

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $C^\infty([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Première partie

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions p et q de $C^\infty([0,1])$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $A_{p,q}(y) = 0$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.

1.a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.

1.b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.

2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

2.a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. [On pourra procéder par l'absurde et considérer le wronskien W de y_1 et y_2.]

2.b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$?

Étant donné deux fonctions u et v de $C^\infty([0,1])$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $B_{u,v}(y) = 0$.

3.a) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ et soit W leur wronskien. Vérifier la relation

$$y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W\ .$$

3.b) Montrer que, pour tout couple (p, q), il existe des couples (u, v) tels que Ker $A_{p,q}$ = Ker $B_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u, v).

4. On se donne trois fonctions u, v_1, v_2 de $C^\infty([0,1])$ et on suppose

$$u(x) > 0 \quad , \quad v_2(x) < v_1(x) \quad \text{pour tout } x \in [0,1]\ .$$

Pour $i = 1, 2$, on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

4.a) Vérifier la relation

$$[u y_1 y_2']_a^b = \int_a^b \Big(v_1(x) - v_2(x)\Big) y_1(x) y_2(x)\ dx\ .$$

[On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b \Big(y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1)\Big) dx$.]

4.b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a, b[$. [On pourra procéder par l'absurde.]

Dans toute la suite du problème on note r une fonction de $C^\infty([0,1])$; pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$(D_\lambda) \qquad y'' + (\lambda - r)y = 0\ .$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y_\lambda'(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est *valeur propre*.

Deuxième partie

5.a) Quelles sont les valeurs possibles de dim E_λ ?

5.b) Démontrer l'équivalence des conditions $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

6. Démontrer les assertions suivantes :

6.a) Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x\in[0,1]} r(x)$.

6.b) Si $y_1 \in E_{\lambda_1}$, $y_2 \in E_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x) y_2(x)\ dx = 0$.

Troisième partie

Dans les troisième et quatrième parties, on désigne par $N(\lambda)$ le nombre des zéros de la fonction y_λ dans $[0,1]$ et on se propose d'étudier $N(\lambda)$ en lien avec les valeurs de $y_\lambda(1)$, ainsi que la répartition des valeurs propres.

7. Dans cette question on examine le cas où $r = 0$ et $\lambda > 0$. On désigne par $E(a)$ la partie entière d'un nombre réel a.

7.a) Calculer $y_\lambda(x)$ pour $x \in [0,1]$.

7.b) Calculer $N(\lambda)$.

7.c) Préciser le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0.

On ne suppose plus $r = 0$ ni $\lambda > 0$. On admettra que la fonction de deux variables $(\lambda, x) \mapsto y_\lambda(x)$ est de classe C^∞.

8. Dans cette question, on se propose de démontrer que, si $y_{\lambda_0}(1)$ est non nul, $N(\lambda)$ est constant dans un voisinage de λ_0.

On désigne par $c_1, \ldots, c_n$, $n \geqslant 1$, les zéros de y_{λ_0} dans $[0,1]$ avec

$$0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_n < 1 \ .$$

8.a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2n}$ de nombres réels, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\xi_0 = 0$, $\xi_{2n} = 1$, $0 < \xi_1 < \xi_2$, $\xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$ pour $j = 2, \ldots, n$;

(ii) $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, $j = 1, \ldots, n$;

(iii) $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$.

8.b) Dans cette question, on considère une fonction F de classe C^∞ définie sur un ouvert contenant un rectangle compact $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$. Démontrer l'assertion suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $s_1, s_2 \in I$ et $|s_1 - s_2| < \delta$ impliquent

$$|F(s_1, t) - F(s_2, t)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in J \ .$$

8.c) Montrer que, pour tout λ suffisamment voisin de λ_0, y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$. Conclure.

9. Montrer que, pour tout $\lambda \geqslant \rho = \sup_{x \in [0,1]} r(x)$, on a

$$N(\lambda) \geqslant E\Big((\lambda - \rho)^{1/2} \pi^{-1}\Big) \ .$$

[On pourra utiliser la question **4** et la question **7** en y remplaçant λ par un réel quelconque $\mu < \lambda - \rho$.]

10.a) Montrer que, si $y_\lambda(1)$ est non nul pour tout λ appartenant à un intervalle I, $N(\lambda)$ est constant dans I.

10.b) L'ensemble des valeurs propres est-il vide ou non vide ? fini ou infini ?

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie, on étudie le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0 tel que $y_{\lambda_0}(1) = 0$. On écrira $y(\lambda, x)$ au lieu de $y_\lambda(x)$, et on rappelle que cette fonction de deux variables est de classe C^∞ ; l'équation (D_λ) s'écrit donc :

$$\text{(i)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (\lambda - r)y = 0 \,.$$

11. Démontrer que la relation (i) entraîne les relations suivantes :

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} + (\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + y = 0$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} y - y^2 = 0$$

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 1) = \int_0^1 y(\lambda_0, x)^2 \, dx > 0 \,.$$

12. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant les propriétés suivantes :

(i) si $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0[$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$;
(ii) si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0)$.

13. Montrer qu'on peut écrire les valeurs propres comme une suite croissante infinie $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, et exprimer $N(\lambda_n)$ en fonction de n.

* *
*