CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$.

On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X).$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. EXEMPLES

1. Soient α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

   (b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3. *Cas* $n = 2$
   Déterminer $\mathcal{E}_2$ puis montrer que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}.

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

6. *Utilisation de la calculatrice*

   (a) Écrire un algorithme en français qui, à partir d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, teste si la matrice est ou n'est pas une matrice à diagonale propre. On considère que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.

   (b) Écrire ensuite cet algorithme sur la calculatrice (il n'est pas demandé d'écrire sur la copie le programme en langage calculatrice). Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les produits

$$a_{12}a_{21}, \quad a_{13}a_{31} \quad \text{et} \quad a_{23}a_{32}$$

pour qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à diagonale propre inversible soit telle que A^{-1} soit également une matrice à diagonale propre (on demande juste de donner cette conjecture sans chercher à la prouver).

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que

$$\det M = (\det A)(\det C)$$

(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

8. Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
   (a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
   (b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

9. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a\,{}^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
10. Si on note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles, démontrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.
11. *Matrices trigonalisables*
    (a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
    (b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
    (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
12. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.
    $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

13. *Question préliminaire*
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer trace$({}^tAA)$.

14. *Matrices symétriques à diagonale propre*
    (a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

    Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

    (b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

15. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
    (a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.
    (b) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.
    (c) Conclure que A est la matrice nulle.

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16. *Question préliminaire*
Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
Démontrer que
$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2},$$
pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$.
Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

18. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Fin de l'énoncé