Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Questions de cours.

1. Donner la définition du rang d'une matrice.

2. Citer sans démonstration le théorème du rang.

3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors même rang ? (On ne demande pas de justifier votre réponse)

4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice ?

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle O_n.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $B = \left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.
Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

v^0 est l'endomorphisme identité,

et $\forall\ m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v o v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$J(\lambda) = \left(u_{ij}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall\ i \in \{1,\dots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall\ i \in \{1,\dots,n\},\ u_{ii} = \lambda \\ u_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que :

$$e^{z} = e^{x}\, e^{iy} = e^{x}\left(\cos\ y + i\ \sin\ y\right)$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice : $\alpha(M) = \lim\limits_{m \to +\infty} S_m$ avec $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{M^k}{k!}$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m.

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\ \alpha(B)$.

Partie 1 : Quelques calculs préliminaires.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A.

2. Vérifier que : $\ker(A + I_3)^2 \ \oplus\ \ker(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.

2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n-1$, puis pour tout $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n$.

2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.

3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Partie 3 : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker\left(u^i\right) \subset \ker\left(u^{i+j}\right)$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim\left(\ker u^m\right)$.

Prouver que : $r = \inf\ \left\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\right\}$ existe.

3. Montrer que :

(i) $\forall\ m < r$, $\ker\left(u^{m}\right)$ est strictement inclus dans $\ker\left(u^{m+1}\right)$,

(ii) $\ker\left(u^{r}\right) = \ker\left(u^{r+1}\right)$,

(iii) $\forall\ m \geqslant r$, $\ker\left(u^{m}\right) = \ker\left(u^{m+1}\right)$.

Partie 4 : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang $n-1$** et vérifiant : $V^{n} = O_n$.

On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^{q} à $\mathrm{Im}\left(v^{p}\right)$.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}\,(w)$.

1.2. Prouver que : $\ker\,(w) \subset \ker\left(v^{q}\right)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a :

$$\dim\left(\ker\left(v^{p+q}\right)\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(v^{p}\right)\right) + \dim\left(\ker\left(v^{q}\right)\right).$$

1.4. En déduire :

$$\forall\ i \in \{1,\dots,n\},\quad \dim\left(\ker\left(v^{i}\right)\right) \leqslant i.$$

1.5. Démontrer qu'en fait : $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}$, $\dim\left(\ker\left(v^{i}\right)\right) = i$.

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que :

$$B_1 = \left(e,\ v(e),\ v^{2}(e),\ \dots,\ v^{n-1}(e)\right)$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base.

Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Partie 5 : Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que : $\forall\ M \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall\ P \in GL_n(\mathbb{C})$,

$$P^{-1}\,\alpha(M)\,P = \alpha\left(P^{-1}MP\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$e^{z} = i,\quad e^{z} = -1,\quad e^{z} = -3-4i.$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$.

Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que : $e^{z} = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que : $e^{s} = \mu$.

4.1. Déterminer : $\alpha(sI_n)$.

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = sI_n + J(0)$.

Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.

4.3. Vérifier que la matrice : $\mu\left[\ \alpha(J(0)) - I_n\right]$ est nilpotente de rang $n-1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}\ \alpha(J(s))\ Q = J(\mu).$$

5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée : $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation : $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7. *Applications*

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),\ i^2 = -1$.

Déterminer une matrice X_1 telle que : $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.

7.2.1. Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2. Soit $H = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.

7.2.3. Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$.

Fin de l'épreuve.