

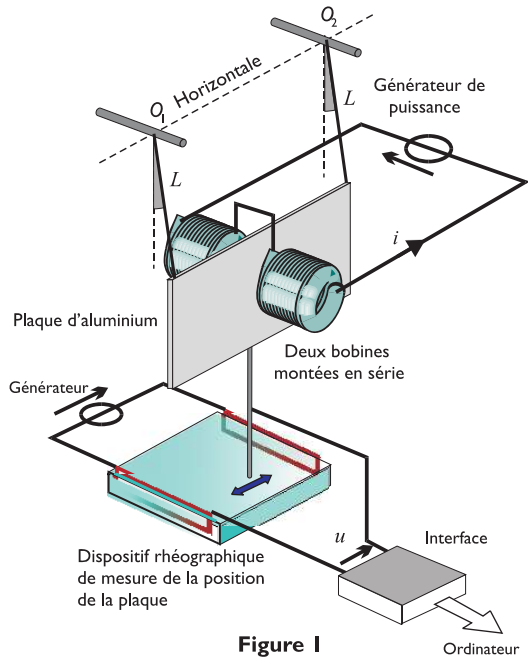
Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : **PHYSIQUE**Filière **MP****Freinage électromagnétique d'une plaque métallique***Les calculatrices sont autorisées.*

Les courants de Foucault sont d'un usage fréquent dans le freinage des véhicules utilitaires. L'expérience décrite ci-dessous, aisément réalisable dans le laboratoire d'enseignement d'un Lycée, permet une étude quantitative de ce phénomène physique.

Une plaque en aluminium oscille dans un plan vertical situé entre deux bobines parcourues par un courant constant. Les oscillations de la plaque amorties par l'interaction des courants de Foucault et du champ magnétique sont suivies par une méthode rhéographique qui génère une tension image du déplacement horizontal de la plaque.

Les notations et les valeurs numériques des grandeurs physiques intervenant lors de la mise en équation de cette expérience sont précisées ci-dessous :

**Figure 1**

Accélération de la pesanteur

$$g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Charge de l'électron

$$q_e = -e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Masse volumique de l'aluminium

$$\mu = 2,72 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Conductivité électrique de l'aluminium

$$\gamma = 3,61 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Épaisseur de la plaque carrée	$h = 1,00 \text{ mm}$
Longueur d'un côté de la plaque carrée	$d = 30,0 \text{ cm}$
Vitesse de déplacement constante imposée par l'expérimentateur (parties II et III)	$v_0 = 1,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Longueur caractéristique de l'extension de la zone de champ	$a = 3,00 \text{ cm}$
Intensité du champ magnétique	$B_0 = 40,0 \text{ mT}$

Nous rappelons également quelques relations mathématiques utiles :

$$\int_{u=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Laplacien en coordonnées cylindriques d'une fonction scalaire $g(r, \theta, z)$:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

Divergence et rotationnel en coordonnées cylindriques, d'un vecteur

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z :$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u}_z.$$

Partie I - Analyse d'une expérience

On se propose d'étudier les oscillations libres, puis amorties, d'une plaque homogène carrée de côté d , de masse m et d'épaisseur h négligeable devant d , astreinte à se déplacer dans le plan Oxy . Le point O est l'intersection de l'axe de révolution des bobines avec le plan de la plaque. Cette plaque est reliée aux points fixes O_1 et O_2 (avec $\vec{OO}_2 \cdot \vec{u}_y = -\vec{OO}_1 \cdot \vec{u}_y = d/2$) par deux fils inextensibles, sans masse et de longueur L fixés au niveau de la plaque en A_1 et A_2 .

Nous faisons l'hypothèse que, durant les oscillations, les fils restent tous les deux tendus et que les liaisons aux différents points de fixation sont parfaites.

Nous notons

$$\theta = \widehat{(\vec{u}_x, \overrightarrow{O_1A_1})} = \widehat{(\vec{u}_x, \overrightarrow{O_2A_2})}, \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{O_1A_1}}{L},$$

$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{g} = g\vec{u}_x.$$

Soient G le centre de masse de la plaque, $y = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{u}_y$, et $\vec{v} = v\vec{u}_y = \dot{y}\vec{u}_y$ la composante horizontale de la vitesse de G dans le référentiel du laboratoire. On pourra supposer que G est en O lorsque la plaque est au repos.

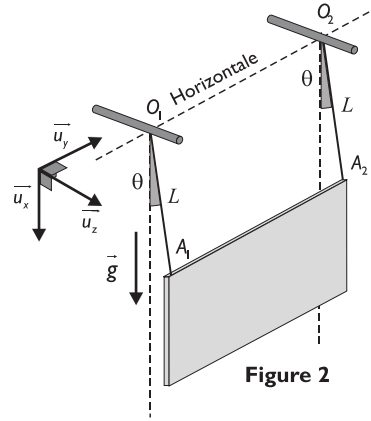


Figure 2

I.A - Étude des petites oscillations libres

À l'instant initial, la plaque est lâchée sans vitesse en $\theta = \theta_0$.

I.A.1)

a) Exprimer les vecteurs vitesse des points A_1 et A_2 par rapport au référentiel du laboratoire. Soit $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ le vecteur rotation de la plaque dans ce référentiel. Que peut-on dire de $\vec{\Omega}$ et du mouvement de la plaque dans ce même référentiel ?

b) Exprimer alors l'énergie cinétique de la plaque dans le référentiel du laboratoire en fonction de m , L et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

c) En traduisant la conservation de l'énergie mécanique du système, établir l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de g , L , θ_0 et θ . Montrer que pour les petites oscillations, l'équation du mouvement de la plaque se met sous la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ pour ces petites oscillations.

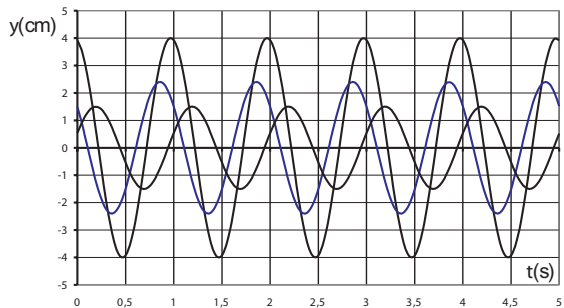


Figure 3

d) La figure 3 fournit des courbes expérimentales relatives à diverses conditions initiales. En quoi ces courbes sont-elles en accord avec cette équation différentielle ?

e) Déterminer pour chacune des trois courbes les valeurs maximales de $\dot{y}(t)$. Représenter les trois trajectoires associées à ces courbes dans l'espace des phases (y, \dot{y}) . Quelle propriété géométrique relie ces courbes ?

I.A.2)

a) À partir des résultats expérimentaux fournis en figure 3 déterminer la valeur numérique de la longueur L des fils de suspension.

b) Dans le cas d'une amplitude angulaire de $\theta_{max} = 15^\circ$, déterminer et comparer les valeurs numériques des amplitudes crête à crête, des déplacements du centre de masse G selon Ox et Oy , notés respectivement Δx_G et Δy_G .

I.B - Détermination expérimentale du coefficient d'amortissement des petites oscillations

Dans cette question les bobines sont parcourues par un courant continu d'intensité i . La plaque de cuivre, en mouvement quasi horizontal selon Oy dans le champ magnétique ainsi créé, est alors soumise à un freinage électromagnétique de résultante $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$.

I.B.1) Montrer que l'équation différentielle normalisée traduisant l'évolution temporelle de y dans cette situation expérimentale de petites oscillations amorties est :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0. \text{ Relier } \lambda \text{ à } \alpha \text{ et } m.$$

I.B.2) La figure 4 correspond à un enregistrement effectué pour un courant d'intensité $i_0 = 2,85$ A, pour lequel on précise les coordonnées des trois premiers maxima locaux $S_1(t_1, y_1)$, $S_2(t_2, y_2)$ et $S_3(t_3, y_3)$ avec :

$t_1 = 0,610$ s	$y_1 = 2,42$ cm
$t_2 = 1,80$ s	$y_2 = 1,35$ cm
$t_3 = 2,97$ s	$y_3 = 0,764$ cm

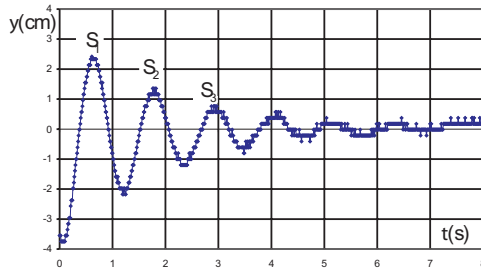


Figure 4

a) Calculer numériquement et comparer $\delta = \ln(y_1/y_2)$ et $\delta' = \frac{1}{2} \ln(y_1/y_3)$. En justifiant vos calculs par un raisonnement, déterminer alors la valeur numérique expérimentale λ_{exp} du coefficient λ pour ce courant continu d'intensité $i_0 = 2,85$ A.

b) En déduire la valeur numérique expérimentale α_{exp} du coefficient α .

I.B.3) Le tableau ci-dessous regroupe des valeurs expérimentales λ_{exp} obtenues pour différents courants continus d'intensité i . On se propose de vérifier si ces résultats sont en accord avec une loi de variation du type $\lambda = \lambda_0 + \beta i^2$.

i (A)	0	0,24	0,52	0,77	1	1,15	1,57	1,84	2,1	2,45
λ (s ⁻¹)	0,0138	0,0182	0,0309	0,0513	0,0689	0,0932	0,151	0,203	0,260	0,355

a) À quel phénomène physique correspond le terme λ_0 ?

b) Pourquoi cherche-t-on à priori une dépendance de λ en i^2 et non en i ?

c) Le modèle proposé est-il en accord avec les résultats expérimentaux ?

d) Dans l'affirmative, déterminer les valeurs numériques de λ_0 et β .

I.B.4) Algorithmique.

Lors de l'enregistrement des données expérimentales, il est créé un tableau D de n valeurs réelles D_p , p variant de 1 à n , correspondant à un échantillonnage à intervalles de temps réguliers de la variable $y(t)$. Nous avons donc $D_i = y(p \times \Delta t)$, où Δt désigne une durée choisie par l'expérimentateur.

a) Écrire une procédure $F(D, n)$ qui renvoie le nombre de maxima locaux détectés lors de l'acquisition.

b) Écrire une procédure $G(D, n)$ qui retourne la moyenne des décroissements logarithmiques évalués à chaque fois à partir de deux maxima locaux successifs.

I.C - Structure du champ magnétique créé par les bobines

Le dispositif de production de champ magnétique (voir figure 1) est constitué de deux bobines cylindriques identiques d'axe commun Oz et placés symétriquement par rapport à l'origine du repère $Oxyz$. La figure 5 représente les lignes de champ magnétique dans une partie du plan xOz .

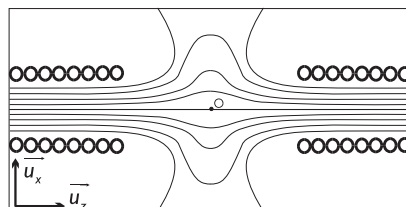


Figure 5

I.C.1) Le sens du courant dans les bobines étant précisé sur la figure 1, indiquer sur un schéma l'orientation des lignes de champ magnétique.

I.C.2) Peut-on réaliser une carte de champ dans le plan xOy ?

I.C.3) Quelles conséquences peut-on tirer de la géométrie cylindrique des deux bobines ?

I.C.4) Dans le volume intérieur de ces bobines, les lignes de champ peuvent être considérées comme parallèles. Montrer que ceci implique que le champ magnétostatique est uniforme dans ce domaine.

I.C.5) On considère une ligne de champ magnétique située au voisinage de l'axe Oz (les échelles en x et en z de la figure 6 ne sont donc pas identiques). En un point A de cet axe (resp. C), la distance séparant la ligne de champ de l'axe vaut r_A (resp. r_C). Exprimer $B_z(A)$, composante selon Oz du champ magnétique en A en fonction de $B_z(C)$, r_A et r_C .

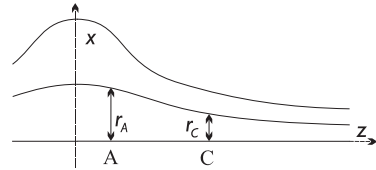


Figure 6

I.C.6) Établir que pour un point de cote z , situé sur l'axe Oz au voisinage du point O , la composante B_z varie en

$$B_z(z) \approx B_z(0)[1 + z^2/l^2].$$

Dans cette expression, l désigne une longueur caractéristique que l'on ne cherchera pas à déterminer.

I.C.7) On cherche maintenant à caractériser la composante B_z dans le plan xOy , tout en restant au voisinage du point O . À partir d'une équation locale vérifiée par le champ magnétostatique \vec{B} , établir que

$$B_z(r, z=0) \approx B_z(0)[1 - \xi r^2]. \text{ Exprimer la constante } \xi.$$

Partie II - Structure du champ électrostatique dans la plaque métallique

Moyennant quelques hypothèses simplificatrices, il est possible d'établir une expression théorique du coefficient α . En repérant un point M de l'espace par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , nous supposons que :

- dans le plan Oxy , le champ magnétostatique créé par les bobines est de la forme

$$\vec{B}(x, y, 0) = B_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \vec{u}_z$$

où a est une longueur caractéristique de l'extension de la zone de champ magnétostatique dans ce plan.

- Dans \mathcal{R}_b , le référentiel des bobines créant le champ magnétostatique, la plaque métallique se déplace selon Oy à une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$, maintenue constante par un opérateur. De plus, la plaque en translation est à tout instant parallèle au plan Oxy .

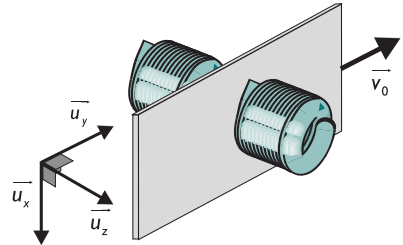


Figure 7

En pratique, cette hypothèse n'est pas très restrictive pour l'étude des oscillations de la plaque dans la mesure où le temps de réorganisation des charges statiques est extrêmement court devant la période de l'oscillateur.

- Comme l'épaisseur h de la plaque est très petite devant a , le champ magnétostatique dans le volume occupé par la plaque est correctement décrit par la seule composante B_z dans le référentiel \mathcal{R}_b :

$$\vec{B}(x, y, z) = B_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \vec{u}_z.$$

- Les dimensions de la plaque dans les directions Ox et Oy sont très grandes devant a , ce qui permet de négliger les effets de bords.
- La vitesse du conducteur est suffisamment faible, pour que le champ magnétique créé par les courants induits soit négligeable devant le champ magnétostatique créé par les bobines.

Par ailleurs, on définit les coordonnées cartésiennes réduites utiles dans la suite par les relations $X = x/a$, $Y = y/a$ et $Z = z/a$.

II.A - Distribution volumique de charges statiques

Le conducteur en mouvement dans une zone de champ magnétique n'est plus en équilibre électrostatique. La densité volumique de charge ρ n'est donc plus, a priori, identiquement nulle dans le matériau conducteur. Comme la plaque est en translation uniforme, cette distribution de charges est stationnaire dans \mathcal{R}_b . La zone chargée est donc fixe par rapport aux bobines, mais se déplace à la vitesse $-v_0 \vec{u}_y$ par rapport au conducteur.

II.A.1) En prenant en compte dans \mathcal{R}_b le champ magnétostatique \vec{B} créé par les bobines et le champ électrostatique \vec{E} généré par les charges fixes, montrer que la densité volumique de courant \vec{j} dans ce référentiel \mathcal{R}_b s'écrit $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B})$.

II.A.2) Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par \vec{j} .

II.A.3) En déduire que, en coordonnées cartésiennes réduites, ρ se met sous la forme

$$\rho(X, Y, Z) = \Gamma X \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{2}\right).$$

Expliciter la constante Γ en fonction de ε_0 , v_0 , B_0 et a .

II.A.4) La densité volumique de charges ρ est maximale en M_0^+ et minimale en M_0^- . Déterminer les coordonnées réduites de ces points et préciser la valeur maximale ρ_{max} de ρ .

II.A.5) Expliciter les éléments de symétrie de la distribution de charges ρ et tracer l'allure des courbes d'isodensité de charges dans le plan OXY .

II.A.6) On cherche à estimer le défaut d'électrons dans le demi-espace $X > 0$. On note Q la charge électrique contenue dans cette partie de la plaque. Montrer que $Q = \sqrt{2\pi} \varepsilon_0 v_0 B_0 h a$. Combien d'électrons excédentaires cela représente-t-il dans la partie $X < 0$? Commenter le résultat obtenu.

II.B - Résolution de l'équation de Poisson dans le référentiel \mathcal{R}_b

Les charges statiques, dont la répartition vient d'être étudiée, créent en tout point de l'espace un potentiel électrostatique $V(x, y, z)$ que l'on prendra nul au centre O du dispositif expérimental $V(0, 0, 0) = 0$.

II.B.1) Si $h \ll a$, on peut montrer que la composante E_z est pratiquement négligeable devant les autres composantes du champ électrique \vec{E} dans la plaque métallique. En déduire que dans le matériau conducteur, en un point M , le potentiel électrostatique ne dépend que des variables de position

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = (\vec{u}_x, \widehat{\vec{OM}}), \text{ reliant } V(M) \text{ et } \rho(M).$$

II.B.2) Écrire l'équation de Poisson en coordonnées cartésiennes réduites (X, Y) puis en coordonnées polaires réduites $(R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \theta)$.

À grande distance de O , donc pour $R \gg 1$, le potentiel électrostatique doit s'apparenter à celui d'une distribution dipolaire invariante par translation suivant OZ du type $V_0 \frac{\cos\theta}{R}$. Nous chercherons donc une solution de l'équation de Poisson de la forme

$$V(R, \theta) = V_0 \frac{\cos\theta}{R} f(R)$$

la fonction adimensionnée $f(R)$ vérifiant les conditions $f(0) = 0$ et $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = 1$.

II.B.3) Donner l'expression de V_0 en fonction de v_0 , B_0 et a . Vérifier son homogénéité et montrer que $f(R)$ vérifie l'équation différentielle

$$R \frac{d^2 f}{dR^2} - \frac{df}{dR} = -R^3 \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right).$$

La solution de cette équation compatible avec les conditions aux limites s'écrit

$$f(R) = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right).$$

II.B.4) Le potentiel est maximal en M_1^+ et minimal en M_1^- . Rechercher les coordonnées réduites de ces points et placer sur un schéma les points M_1^+ , M_1^- , M_0^+ , M_0^- (cf. II.A.4).

II.B.5) Établir l'expression littérale de ΔV_{max} , différence de potentiel maximale entre deux points de la plaque conductrice. Déterminer la valeur numérique de ΔV_{max} .

II.C - Structure du champ électrique

II.C.1) Montrer que, en coordonnées réduites, le champ électrique se met sous la forme

$$\vec{E} = \frac{V_0}{a} \left[\frac{1 - e^{-R^2/2}}{R^2} - e^{-R^2/2} \right] \cos\theta \vec{u}_R + \frac{V_0}{a} \frac{1 - e^{-R^2/2}}{R^2} \sin\theta \vec{u}_\theta.$$

II.C.2) La figure 8, ci-contre, représente les lignes de champ électrique dans le domaine ($0 \leq X \leq 3$; $0 \leq Y \leq 3$). Reproduire cette figure en précisant l'orientation de ces lignes et en la complétant pour ($-3 \leq X \leq 3$; $-3 \leq Y \leq 3$).

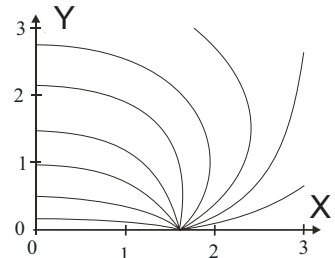


Figure 8

II.C.3) Déterminer, au centre O de la zone de champ magnétique, l'expression du champ électrique $\vec{E}(O)$ et calculer sa valeur numérique. Comparer $\vec{E}(O)$ à $v_0 \wedge \vec{B}(O)$.

II.C.4) Pour vérifier la cohérence du calcul précédent, on enlève la plaque conductrice et on place deux fils infinis parallèles à OZ , passant par les points M_1^+ et M_1^- . Les fils portent des densités linéiques de charges opposées $\pm\lambda$, telles que $\lambda = Q/h$ ($+Q$ étant définie à la question II.A.6). La densité est positive pour le fil qui passe par M_1^+ et négative pour l'autre.

a) Établir rapidement l'expression du champ électrostatique d'un fil portant la densité linéique λ .

b) En déduire l'expression $\vec{E}'(O)$ du champ électrique produit en O par les deux fils infinis passant par les points M_1^+ et M_1^- .

c) Comparer $\vec{E}'(O)$ et $\vec{E}(O)$.

Partie III - Répartition des courant de Foucault et estimation de la résultante des force de Laplace

III.A - Expression théorique du coefficient d'amortissement

Nous revenons maintenant à l'étude de la plaque et nous allons chercher à déterminer la répartition des courants de Foucault au sein du volume conducteur.

III.A.1) Dédurre des parties précédentes les expressions des composantes polaires réduites de la densité volumique de courant \vec{j} .

III.A.2) Indiquer, le cas échéant, les plans de symétrie ou d'antisymétrie de la distribution de courants.

III.A.3) Comparer $\vec{j}(O)$ et $\gamma\vec{E}(O)$.

III.A.4) Rechercher les coordonnées réduites des points N_1 et N_2 pour lesquels $\vec{j} = 0$.

III.A.5) La figure ci-contre indique les lignes de courants dans le plan OXY . Reproduire l'allure de cette figure en précisant l'orientation des lignes de courant (on rappelle que $v_0 > 0$). Placer les points N_1 , N_2 , et M_1^+ et M_1^- .

III.A.6) Comment choisir la surface d'intégration Σ pour que le flux de \vec{j} à travers Σ soit l'intensité totale I_{tot} associée aux courants induits. Une estimation rapide donne l'ordre de grandeur $I_{tot} \approx \gamma h v_0 B_0 a$. À titre indicatif, I_{tot}

est de l'ordre de plusieurs dizaines d'ampères dans les conditions expérimentales de la Partie I.

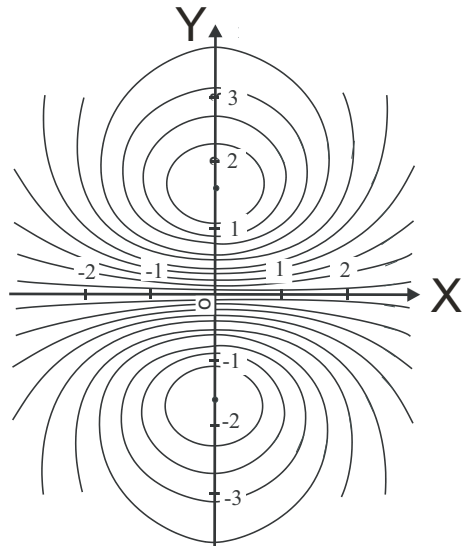


Figure 9

III.B - Expression théorique du coefficient d'amortissement

III.B.1) Rappeler l'expression de la densité volumique \vec{f}_L des forces de Laplace.

III.B.2) Montrer à l'aide d'arguments de symétrie clairement dégagés que la résultante \vec{F}_L des forces de Laplace est colinéaire à u_y .

III.B.3) Mettre \vec{F}_L sous la forme $\vec{F}_L = -\alpha_{theo} \vec{v}$ en explicitant α_{theo} en fonction de γ , h , B_0 et a .

III.B.4) Application numérique : comparer α_{theo} et α_{exp} .

Une des raisons du désaccord, certes limité mais réel, entre ce modèle théorique et les résultats expérimentaux est liée à l'existence de charges électriques réparties en surface sur les bords latéraux de la plaque pour maintenir les lignes de courant au sein du conducteur. Si la plaque n'est pas assez grande, ces effets de bords doivent être pris en compte.

III.C - Effet Joule et résistance équivalente de la plaque conductrice

III.C.1) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur en fonction de α_{theo} et de v_0 .

III.C.2) Montrer que la résistance électrique totale R_{tot} qu'oppose la plaque aux courants induits ne dépend en première approximation que de son épaisseur et de la conductivité du matériau.

III.C.3) Estimer R_{tot} pour la plaque étudiée dans l'expérience de la Partie I.

••• FIN •••
