

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIERE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2007

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Régularisation de fonctions

Ce problème présente un procédé d'approximation de fonctions par des fonctions plus régulières.

Pour tout entier  $k \geq 0$  on désigne par  $C_{\text{per}}^k$  l'espace des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes,  $2\pi$ -périodiques et de classe  $C^k$ ; on note de même  $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$  l'espace des fonctions  $2\pi$ -périodiques et continues par morceaux. Pour toute fonction  $f$  de  $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$  on définit ses coefficients de Fourier par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad , \quad n \in \mathbf{Z} .$$

Étant donné une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ , on dit que la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n$  est convergente si les séries  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$  et  $\sum_{n \geq 1} \alpha_{-n}$  le sont, et on pose alors

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n = \sum_{n \geq 0} \alpha_n + \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n} .$$

## Première partie

1. Dire pour quelles valeurs du couple  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$  est convergente.

On suppose maintenant  $t > 0$  et on note  $P(t, x)$  ou  $P_t(x)$  le nombre  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ .

2. Vérifier que  $P(t, x)$  est réel. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} P(t, x) dx$ .

3.a) Montrer que la fonction  $P$ , définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , est indéfiniment différentiable, et écrire ses dérivées partielles  $\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x^q} P(t, x)$  sous forme de sommes de séries.

3.b) Calculer  $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ .

4. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction  $P_t$ .

5. Dire pour quelles valeurs du couple  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  on a  $1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} = 0$ .

On suppose maintenant  $t > 0$ .

6. Démontrer l'égalité

$$P(t, x) = \frac{1 - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}}$$

et préciser le signe de cette expression.

7. Démontrer les assertions suivantes. On suppose  $x \in [-\pi, \pi]$  et on fait tendre  $t$  vers 0 par valeurs supérieures; alors  $P_t(x)$  tend vers 0 si  $x \neq 0$ , vers  $+\infty$  si  $x = 0$ , et la convergence est uniforme sur tout ensemble de la forme  $[-\pi, -a] \cup [a, \pi]$  où  $a \in ]0, \pi[$ .

### Deuxième partie

Dans cette seconde partie on se donne une fonction  $f$  de  $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$ ; on suppose toujours  $t > 0$ .

8. Vérifier que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}$  est convergente.

Sa somme sera notée  $\Phi_f(t, x)$  ou  $\Phi_{f,t}(x)$ .

9. Montrer que la fonction  $\Phi_f$ , définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , est indéfiniment différentiable, et écrire ses dérivées partielles sous forme de sommes de séries.

10. Calculer  $\Phi_{f,t}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) f(y) dy$ .

11. On suppose  $f \in C_{\text{per}}^k$ ,  $k \geq 0$ . Montrer que, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $\Phi_{f,t}^{(p)}$  converge uniformément vers  $f^{(p)}$  pour tout  $p \leq k$ .

### Troisième partie

12. Étant donné un nombre réel  $\alpha \geq 1$ , montrer qu'il existe un réel  $\mu_\alpha$  tel que l'on ait  $(1+u)^\alpha \leq \mu_\alpha(1+u^\alpha)$  pour tout  $u \geq 0$ .

Pour tout  $\alpha \geq 0$  on note  $E_\alpha$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$  satisfaisant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 (1+n^2)^\alpha < +\infty.$$

On pourra admettre que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de  $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$ .

**13.a)** Montrer que, pour tout entier  $k \geq 0$ , on a  $C_{\text{per}}^k \subset E_k$ .

**13.b)** A-t-on  $C_{\text{per}}^k = E_k$  ?

**13.c)** Montrer que  $E_\alpha \subset C_{\text{per}}^k$  si  $k \geq 0$  et  $\alpha > k + 1/2$ .

[On pourra traiter d'abord le cas où  $k = 0$ ].

Dans la suite du problème, on se donne un nombre réel  $r \geq 0$ ; pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , on pose  $\varphi_t(x) = x^r e^{-tx}$ .

**14.** Exprimer le nombre  $C = t^{r+1} \int_0^{+\infty} \varphi_t(x) dx$  à l'aide de la fonction  $\Gamma$  et vérifier qu'il est indépendant de  $t$ .

**15.** Montrer que  $\sum_{n \geq 1} n^r e^{-tn}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

**16.** Étant donné un réel  $\tau > 0$ , déterminer un réel  $C'$  tel que l'on ait

$$\sum_{n \geq 1} n^r e^{-tn} \leq C' t^{-r-1} \quad \text{pour tout } t \in ]0, \tau].$$

On se donne maintenant une fonction  $f \in E_\alpha$  pour un certain  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1]$ ; on désigne encore par  $\tau$  un réel  $> 0$ .

**17.a)** Déterminer un réel  $C''$  tel que l'on ait

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_f(t, x) \right| \leq C'' t^{\alpha-3/2} \quad \text{pour } (t, x) \in ]0, \tau] \times \mathbb{R}.$$

**17.b)** Déterminer un réel  $C'''$  tel que l'on ait  $\|\Phi_{f,t} - f\|_\infty \leq C''' t^{\alpha-1/2}$  pour tout  $t \in ]0, \tau]$ , où l'on a posé, pour toute fonction  $g$  bornée sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

\* \*  
\*