e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i.$$

Soit α un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$xy' + \alpha y = F(x).$$

1. On désigne par J un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0. Résoudre sur J l´équation homogène $xy' + \alpha y = 0$; on pourra poser $z = |x|^\alpha y$ et déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par z.

On désigne par I la réunion des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. 2a) Résoudre sur I l´équation homogène $xy' + \alpha y = 0$

2b) Quelles sont les solutions sur I de l´équation homogène $xy' + \alpha y = 0$ qui admettent une limite finie en 0 ?

3. Soient a, b deux réels. Justifier que l'équation différentielle $\mathcal{E}$ admet une unique solution f définie sur I et telle que $f(-1) = a$ et $f(1) = b$. On énoncera précisément le théorème utilisé.

4. Montrer qu'il existe au plus une solution de $\mathcal{E}$ sur I qui admet une limite finie en 0.

5. Soit f une fonction développable en série entière ; son rayon de convergence noté R est supposé non nul. On note $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les coefficients de f :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

5a) On suppose que f est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[$. Exprimer les coefficients $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en fonction des coefficients $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de F. Que peut on dire alors de R ?

5b) Réciproquement, démontrer que $\mathcal{E}$ admet une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On introduira la série entière :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{i+\alpha} x^i$$

dont on déterminera le rayon de convergence.

5c) Au vu des résultats précédents, quelles précisions peut-on apporter à la question 4 ?

6. Dans cette question, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x$.

6a) Soit $x \in]0, +\infty[$; démontrer que l'intégrale $\int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt$ est convergente.

On définit h sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ h(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt.$$

6b) Montrer que h est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$.

6c) Montrer que $h(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Déterminer cette limite.

6d) En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+\alpha) i!} x^i.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.

   1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

   1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

   1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1,0)$ et $(-1,0)$.

   1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h,k) \rightarrowtail f(1+h,k)$ au voisinage de $(0,0)$. Le point $(1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?

   1e). De même, le point $(-1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.

   1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.

2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

   2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.

   2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

   2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.

   2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.

Exercice 3

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On considère J_n la matrice de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté $\mathbf{v}$.

1. Montrer l'égalité $J_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
2. Déterminer l'image de J_n. Quelle est la dimension du noyau de J_n ?
3. Calculer J_n^2.
4. Montrer que J_n est diagonalisable. Expliciter ses valeurs propres et pour chacune, préciser la multiplicité.

Soit M une matrice de taille n à coefficients réels.

5. Dans cette question, on considère l'équation $\mathcal{E}$ d'inconnue le réel x :

$$\det(M + xJ_n) = 0 \qquad (\mathcal{E}).$$

On note $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{E}$.

   (a) Lorsque $M = 0$, la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

   (b) Lorsque $M = I$, la matrice identité, montrer que $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ est réduit à un unique élément. Préciser cet élément.

   (c) On suppose M inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.

      (i) Montrer qu'un vecteur $\mathbf{w}$ dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$.

      (ii) Soit $\mathbf{w} = M^{-1}\mathbf{v}$. En notant σ la somme des coordonnées du vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$, démontrer l'équivalence :

$$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow (1 + x\frac{\sigma}{n}) = 0.$$

   En déduire que $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ est au plus de cardinal 1. Pour quelle valeur de σ, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ est-il vide ?

(d) On se propose de déterminer $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ lorsque M est non inversible.

(i) Montrer que $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ est non vide.

(ii) S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ et l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{F})$ d'inconnue x, définie par :

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0 \qquad\qquad (\mathcal{F}).$$

(iii) Conclure.

6. Soit f la fonction de la variable réelle x définie en posant :

$$f(x) = \det(M + xJ_n).$$

(a) Démontrer qu'il existe des réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha + x\beta$. Expliciter α et β en fonction de M et des coefficients de la comatrice de M.

On rappelle que la comatrice de M est la matrice dont le (i, j)-ème coefficient est le déterminant de la matrice obtenue en retirant à M sa i-ème ligne et sa j-ème colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$, pour tous les indices i et j dans $\{1, ..., n\}$.

(b) Retrouver ainsi les résultats de la question 5.