MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages

PRÉAMBULE

Dans tout ce problème, $\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Le degré du polynôme nul est pris par convention égal à $-\infty$. Pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifiera chaque fois que c'est nécessaire les éléments de $\mathbf{R}[X]$ à des fonctions réelles d'une variable réelle.

On appelle $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $w : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continues par morceaux telles que
(i) $\forall x \in \mathbf{R}$, $w(x) \geqslant 0$,
(ii) il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel w ne s'annule pas,
(iii) pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n w(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n w(x) = 0$.

Soit n un entier strictement positif. On note $(e_1, \ldots ,e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini comme suit : pour tous réels $x_1, \ldots ,x_n$ et $y_1, \ldots ,y_n$,

$$\langle\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Soit n un entier strictement positif et A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels. Pour tous entiers i et j appartenant à $\{1, \ldots ,n\}$, on note A_{ij} le coefficient de A situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne. Pour tout n entier strictement positif, on note I_n la matrice identité de taille $n \times n$.

On rappelle que si J est un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ et si $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe P dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $\sup\limits_{x\in J} \mid f(x) - P(x) \mid < \varepsilon$.

La quatrième partie du problème est indépendante des trois autres.

Première partie

1. a. Donner un exemple de fonction appartenant à $\mathcal{W}$.
1. b. Soit w un élément de $\mathcal{W}$. Montrer que pour tous P et Q appartenant à $\mathbf{R}[X]$, la fonction d'une variable réelle $x \mapsto P(x)Q(x)w(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. On note alors $(P \mid Q)_w$ le nombre réel défini par

$$(P \mid Q)_w = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)w(x)\, dx.$$

1. c. Montrer que l'application qui à un couple (P,Q) d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ associe $(P \mid Q)_w$ est un produit scalaire. On notera $\|P\|_w = \sqrt{(P \mid P)_w}$ la norme associée.

On appelle suite w-orthogonale échelonnée une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que
(i) $\forall n \geqslant 0$, P_n est de degré n,
(ii) pour tous entiers naturels n et m distincts, $(P_n \mid P_m)_w = 0$.

2. a. Montrer qu'il existe une suite w-orthogonale échelonnée. On donnera une expression d'une telle suite, qui pourra faire intervenir le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)_w$.
2. b. Soient $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites w-orthogonales échelonnées. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, les polynômes P_n et Q_n se déduisent l'un de l'autre par multiplication par un réel non nul.

On choisit une suite w-orthogonale échelonnée que l'on note $(P_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note (a_n,b_n) l'unique couple de réels tel que le polynôme $P_n(X) - a_nX^n - b_nX^{n-1}$ soit de degré inférieur ou égal à $n-2$. On pose $(a_0,b_0) = (P_0(0),0)$.

3. a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $Q \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$, $(XP_n \mid Q)_w = 0$.
3. b. En déduire qu'il existe un unique couple (α_0,β_0) de réels tels que $XP_0(X) = \alpha_0P_1(X) + \beta_0P_0(X)$ et qu'il existe, pour tout $n \geqslant 1$, un unique triplet $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$ de réels tels que

$$XP_n(X) = \alpha_nP_{n+1}(X) + \beta_nP_n(X) + \gamma_nP_{n-1}(X). \tag{1}$$

3. c. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a les égalités

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}\ ,\ \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\ ,\ \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2}.$$

Deuxième partie

Soit w un élément de $\mathcal{W}$. On note J un intervalle de $\mathbf{R}$ tel que $\forall x \notin J$, $w(x) = 0$. Il n'est pas exclu que J soit égal à $\mathbf{R}$. On choisit une suite w-orthogonale échelonnée $(P_n)_{n\geqslant 0}$.

4. Soit $n \geqslant 1$ fixé. On définit un entier naturel r_n et un polynôme R_n comme suit. Si P_n n'a aucune racine dans J ou si toutes ses racines appartenant à J sont d'ordre pair, on pose $r_n = 0$ et $R_n = 1$. Sinon, on définit r_n comme le nombre de racines distinctes d'ordre impair de P_n contenues dans J. On note $\{t_1,\dots,t_{r_n}\}$ l'ensemble de ces racines. On pose alors $R_n(X) = (X - t_1)\dots(X - t_{r_n})$.

4. a. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de signe constant sur J tel que $P_n = Q_n R_n$.

4. b. Montrer que si $r_n < n$, alors $(P_n \mid R_n)_w = 0$. En conclure que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$, que toutes ses racines sont simples et qu'elles appartiennent toutes à J.

5. a. Montrer qu'il existe une suite w-orthogonale échelonnée dont tous les termes sont de norme 1 dans $(\mathbf{R}[X],\|\cdot\|_w)$. Une telle suite est-elle unique?

On suppose jusqu'au **7**.a. inclus que pour tout $n \geqslant 0$, $\|P_n\|_w = 1$. On remarquera qu'avec cette hypothèse supplémentaire, $\gamma_n = \alpha_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit T_1 la matrice 1×1 égale à (β_0) et, pour tout $n \geqslant 2$, T_n la matrice tri-diagonale $n \times n$ suivante:

$$T_n = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & 0 \\ \alpha_0 & \beta_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{n-2} \\ 0 & & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \end{pmatrix},$$

où les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sont celles qui ont été définies à la question **3**. On fixe un entier $n \geqslant 1$.

5. b. Calculer, pour tout réel λ, le vecteur

$$(T_n - \lambda I_n)\begin{pmatrix} P_0(\lambda) \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

5. c. Montrer que le spectre de T_n coïncide avec l'ensemble des racines de P_n.

6. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ son spectre et $(u_1,\dots,u_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$ telle que pour tout i entre 1 et n, on ait $Au_i = \lambda_i u_i$. On suppose que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

Soit B la matrice $(n-1)\times(n-1)$ dont les coefficients sont donnés, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n-1\}^2$, par $B_{ij} = A_{ij}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\mathrm{Sp}(A)$, on note $r(x) = \dfrac{\det(xI_{n-1} - B)}{\det(xI_n - A)}$.

6. a. Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\mathrm{Sp}(A)$. En calculant de deux façons différentes le coefficient (n,n) de la matrice $(xI_n - A)^{-1}$, montrer que

$$\langle (xI_n - A)^{-1}e_n, e_n\rangle = r(x).$$

6. b. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\mathrm{Sp}(A)$,

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_i}\,\frac{\langle e_n,u_i\rangle^2}{\langle u_i,u_i\rangle}.$$

6. c. En déduire que la fonction r est continue et strictement décroissante sur chaque intervalle où elle est définie.

6. d. On suppose que pour tout i appartenant à $\{1,\ldots,n\}$, $\langle e_n,u_i\rangle \neq 0$. Montrer que les valeurs propres de B sont simples et que si on les note $\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ de telle sorte que $\mu_1 < \ldots < \mu_{n-1}$, alors on a

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n.$$

7. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$ les racines de P_n classées dans l'ordre croissant.

7. a. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Montrer que P_{n-1} et P_n n'ont pas de racine commune puis déduire de ce qui précède qu'on a la suite d'inégalités

$$\lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \lambda_2^{(n)} < \lambda_2^{(n-1)} < \ldots < \lambda_{n-1}^{(n)} < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}.$$

7. b. Montrer que le résultat reste vrai sans supposer que pour tout $n \geqslant 0$, $\|P_n\|_w = 1$.

Troisième partie

8. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Soient $x_1,\ldots,x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout i compris entre 1 et n, on définit la forme linéaire $\varphi_i : \mathbf{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbf{R}$ en posant, pour tout $R \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, $\varphi_i(R) = R(x_i)$.

Montrer que $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est une base de l'espace dual de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Soit w un élément de $\mathcal{W}$. On choisit une suite w-orthogonale échelonnée $(P_n)_{n\geqslant 0}$.

9. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On rappelle que les racines de P_n sont toutes réelles et simples et qu'elles sont notées $\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$. Soit U un élément de $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$. Soit R le reste de la division euclidienne de U par P_n.

9. a. Montrer que R est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend les mêmes valeurs que U aux points $\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$.

9. b. Montrer qu'on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)w(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)w(x)\,dx.$$

9. c. Déduire de ce qui précède qu'il existe des constantes réelles $c_1,\ldots,c_n$ telles que pour tout polynôme U appartenant à $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$, on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)w(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i U(\lambda_i^{(n)}).$$

9. d. Montrer que les réels $c_1,\ldots,c_n$ sont strictement positifs.

10. Pour tout intervalle fermé J de $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{W}_J$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}$ formé des fonctions qui prennent des valeurs strictement positives sur J et sont identiquement nulles hors de J.

Soit $J = [a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$. Soit w un élément de $\mathcal{W}_J$.

10. a. Soient s et t deux réels appartenant à J tels que $a \leqslant s < t \leqslant b$. Montrer qu'il existe un polynôme $V \in \mathbf{R}[X]$ qui prend des valeurs strictement négatives sur $J \backslash]s,t[= [a,s] \cup [t,b]$ et tel que

$$\int_a^b V(x)w(x)\,dx > 0.$$

On pourra commencer par montrer qu'il existe une fonction continue affine par morceaux satisfaisant cette propriété.

10. b. Montrer que tout intervalle ouvert non vide contenu dans J a une intersection non vide avec l'ensemble $\Lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} \{\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}\}$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle fermé J de $\mathbf{R}$, on considère le sous-ensemble $\mathcal{W}_J$ de $\mathcal{W}$ défini à la question **10**.

Soit J un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. On dit qu'une fonction $w \in \mathcal{W}_J$ a la propriété (D_J) si l'assertion suivante est vraie:

(D_J) *Si $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que pour tout P appartenant à $\mathbf{R}[X]$, on ait*

$$\int_J f(x)P(x)w(x)\,dx = 0, \tag{2}$$

alors f est identiquement nulle sur J.

11. Soit J un intervalle fermé et borné. Soit w un élément de $\mathcal{W}_J$.

11. a. Soit f une fonction continue de J dans $\mathbf{R}$ telle que l'égalité (2) ait lieu pour tout P appartenant à $\mathbf{R}[X]$. Montrer que $\int_J f(x)^2 w(x)\,dx = 0$.

11. b. En déduire que w a la propriété (D_J).

12. Soient μ et α deux réels tels que $\mu \in]0,1[$ et $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Soit n un entier naturel.

12. a. Montrer que l'intégrale

$$I_n(\mu,\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^\mu e^{i\alpha}} x^n\,dx$$

est convergente.

12. b. Montrer que $I_n(\mu,\alpha) = \frac{1}{\mu} e^{-i\frac{n+1}{\mu}\alpha} K_n(\mu,\alpha)$, où l'on a posé

$$K_n(\mu,\alpha) = e^{i\frac{n+1}{\mu}\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}\,dy.$$

On s'assurera en particulier que la définition de $K_n(\mu,\alpha)$ a un sens.

12. c. Montrer que, n et μ étant fixés, la fonction $\alpha \mapsto K_n(\mu,\alpha)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

12. d. Montrer que cette fonction est constante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

12. e. On suppose $\mu < \frac{1}{2}$. Calculer la partie imaginaire de $I_n(\mu,\pi\mu)$.

12. f. Soit $J = [0,+\infty[$. Toutes les fonctions de $\mathcal{W}_J$ ont-elles la propriété (D_J)?