CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

E est l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
E_1 est le sous-ensemble de E formé des fonctions f telles que l'intégrale impropre

$$\int_x^{+\infty} f(t).\exp(-t)dt$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Etude de quelques exemples :

   a) Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty} cos t \exp(-t)dt$ existe-t-elle ?

   c) En déduire des exemples de fontions appartenant à E_1.

2. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 & \rightarrow & E \\ f & \longmapsto & F \end{array}$$

   où $F(x) = \exp(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t).\exp(-t)dt$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $F = F' + f$
   c) φ est-ele injective ?
   d) Montrer que, si $f \in E_1$ est un vecteur propre de φ alors f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants .
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
   e) Soit $f \in E_1$, bornée et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, montrer que la dérivée f' de f appartient à E_1, et que $\varphi(f') = ((\varphi(f))'$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_2 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   a) Montrer que $E_2 \subset E_1$.
   b) Soit ψ la restriction de φ à E_2.
      (i) Montrer que ψ est un endomorphisme de E_2.
      (ii) Est-ce un automorphisme de E_2 ?
      (iii) ψ est-il diagonalisable ?
   c) Soit $f \in E_2$. Montrer que si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$, alors :
   $$\sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x) \geq 0,$$
   pour tout $x \geq a$. ($f^{(k)}$ désignant la dérivée k^{ieme}de la fonction polynôme f)

Exercice 2

Soients : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. a) Montrer que A est diagonalisable.
   b) Montrer que la matrice P est inversible.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si f et g commutent, les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.
3. En déduire que si f et g commutent, f et g sont simultanément diagonalisables.
4. On considère l'équation matricielle :
   $$(\mathcal{E}) \qquad M^2 - 6M = A$$
   d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels.
   a) Montrer que si la matrice M est solution de $(\mathcal{E})$, alors M et A commutent.
   b) En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ est équivalente à l'équation $(\mathcal{E}')$ d'inconnue D matrice carrée d'ordre trois diagonale :
   $$(\mathcal{E}') \qquad D^2 - 6D = \Delta$$
   où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
   c) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}')$, puis déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 3

E est un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal de sens direct $R=(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On choisit O comme pôle et $(O, \overrightarrow{i})$ comme axe polaire ; a est un réel strictement positif.

1. Tracer la courbe Γ d'équation polaire $\rho = a(1 + cos\theta)$
2. Déterminer la longueur de Γ.
3. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]-\pi, +\pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & t = \tan\dfrac{\theta}{2} \end{array}$$

a) Montrer que : $x = 2a\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $y = \dfrac{4at}{(1+t^2)^2}$ sont des équations paramétriques de Γ.

b) Montrer que la tangente à Γ en le point M de paramètre τ a pour équation :

$$(\tau^3 - 3\tau)y + (3\tau^2 - 1)x + 2a = 0$$

c) Montrer que cette tangente recoupe Γ en deux points P_1 de paramètre t_1 et P_2 de paramètre t_2 si et seulement si $\tau^2 \geq 3$ et alors $t_1.t_2 = 3$.

On considère les tangentes à Γ en ces points P_1 et P_2 ; montrer qu'elles se coupent en le point N de coordonnées (α, β) si et seulement si t_1 et t_2 sont racines de :

$$P(t) = (t^3 - 3t)\beta + (3t^2 - 1)\alpha + 2a$$

et alors la troisième racine t_3 est $t_3 = \dfrac{\alpha - 2a}{3\beta}$

d) En déduire que l'ensemble des points d'intersection N lorque τ décrit $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]+\sqrt{3}, +\infty[$ est inclus dans la courbe dont une équation est :

$$10x^2 - 54y^2 - 22ax + 4a^2 = 0$$

e) Reconnaître et déterminer les éléments remarquables de cette courbe. La représenter dans le repère orthonormal $R=(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.