

Concours Centrale - Supélec 2006

Épreuve : PHYSIQUE

Filière MP

Étude de l'orbite et du maintien à poste d'un satellite héliosynchrone

Les satellites d'observation comme SPOT 5 (lancé en mai 2002 avec succès par une fusée Ariane IV) évoluent sur des orbites dites héliosynchrones. Une orbite héliosynchrone permet de s'assurer que le satellite survolera toujours à la même heure solaire locale une région quelconque de la planète. Ainsi, l'illumination des terrains survolés est toujours la même et permet une comparaison efficace de photographies prises à des époques différentes. Ce problème se propose dans un premier temps d'étudier les caractéristiques d'une orbite héliosynchrone et dans un deuxième temps de préciser les caractéristiques du module de radionavigation du satellite (module qui lui permet de rester sur son orbite de travail).

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - Caractéristique d'une orbite héliosynchrone

La Terre est considérée dans cette partie comme un solide de révolution autour de l'axe des pôles $z'z$, de masse \mathcal{M} . Le mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique.

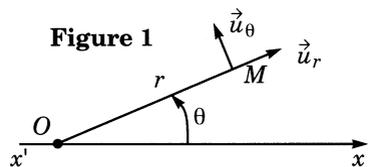
Question préliminaire : Définir ce référentiel.

Dans toute la suite, les frottements seront négligés.

I.A - Premier modèle du champ de gravitation

La Terre, dans ce premier modèle, est sphérique de rayon R , formée de couches concentriques homogènes.

On rappelle qu'en un point M , situé à la distance r du centre géométrique O , le potentiel de gravitation selon la loi de Newton est $V(M)$, et le vecteur champ de gravitation \vec{g} est défini par : $\vec{g}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$. Dans le plan du mouvement, les coordonnées cylindro-polaires d'origine O seront notées $r = OM$, $\theta = (\vec{x}'x, \vec{OM})$, et $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ les vecteurs unitaires correspondants (figure 1).



En M , hors de la distribution de masses, V prend ici la forme (potentiel newtonien) :

$$V(r) = -G \frac{\mathcal{M}}{r} \text{ où } G \text{ est la constante de la gravitation universelle.}$$

I.A.1) Citer, avec justification rapide, deux grandeurs relatives au mouvement, qui restent invariantes au cours du mouvement général elliptique d'un satellite, assimilé à un point matériel de masse m , autour de la Terre. Définir la « constante des aires » C et donner son expression en fonction de r et θ .

I.A.2) On se propose de retrouver la nature et l'équation de la trajectoire par la méthode ci-après :

a) Relier, à l'aide du principe fondamental de la dynamique, les dérivées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et $\vec{u}_\theta(t)$.

b) En déduire l'expression de $\vec{v}(t)$ que l'on mettra sous la forme : $\vec{v}(t) = K(\vec{u}_\theta(t) + \vec{E})$ où \vec{E} est un vecteur constant durant le mouvement, fixé par les conditions du lancement. Préciser l'expression de K .

c) Projeter la relation précédente sur \vec{u}_θ et retrouver l'expression classique de la trajectoire d'un satellite de la forme :

$$r(\beta) = \frac{p}{1 + e \cos \beta}.$$

Définir β . Afin d'exprimer simplement r en fonction de θ , on montrera qu'il est judicieux de choisir l'axe polaire $x'x$, en donnant à l'angle $(\vec{E}, \vec{x}'x)$ une valeur remarquable γ , à calculer.

d) Représenter, dans son plan, la trajectoire, le vecteur \vec{E} , et le satellite M dans une position quelconque. Proposer un nom pour le vecteur \vec{E} .

I.B - Deuxième modèle du champ de gravitation

Dans cette partie, on retient un autre modèle pour le « géoïde terrestre », assimilé maintenant à un ellipsoïde de révolution autour de l'axe $z'z$, et l'expression $V(M)$ du potentiel de gravitation est un développement limité dont on retiendra seulement les deux premiers termes.

Au potentiel newtonien vu précédemment, s'ajoute une perturbation très faible dépendant non seulement de r , mais aussi de la latitude λ du point M .

Au point M de latitude λ , tel que $OM = r$ (figure 2),

$$V(M) = -G \frac{\mathcal{M}}{r} \left(1 + \eta \frac{R^2}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \lambda) \right), \text{ avec}$$

$$\eta = 1,083 \cdot 10^{-3}, R = 6378 \text{ km}, G \mathcal{M} = 4,00 \cdot 10^{14} \text{ SI}.$$

I.B.1) Exprimer les composantes \vec{g}_r et \vec{g}_λ du champ de gravitation sur la base adaptée (\vec{u}_r, u_λ) .

I.B.2) Satellite héliosynchrone.

Pour un satellite d'observation, il est intéressant d'optimiser les visées de toutes les régions de la Terre :

- par le choix d'une trajectoire pratiquement circulaire, d'orbite assez basse (altitude 800 km environ),
- et par les mêmes conditions d'éclairage solaire des zones observées.

Or, quand le satellite repasse, au terme de quelques jours, à la verticale d'une cible, le déplacement du Soleil dans sa course apparente autour de O devrait changer son éclairage. Un choix convenable de l'inclinaison α de la trajectoire sur le plan équatorial peut corriger cet inconvénient. En effet, le terme principal \vec{g}_r du champ de gravitation confère à la trajectoire ses propriétés essentielles (mouvement plan, circulaire), tandis que le terme \vec{g}_λ très faible devant le précédent, perturbe le mouvement idéal, par une lente évolution des paramètres au cours du temps. Si l'on admet l'hypothèse raisonnable (H1)

qu'au cours d'une révolution du satellite, le mouvement reste plan et circulaire, dans ce modèle, le plan Π de l'orbite subit une précession et une nutation lentes, fonction de son inclinaison α sur le plan équatorial de la Terre :

La figure 3 montre le plan équatorial de la Terre et le plan Π de l'orbite circulaire de rayon r non perturbée. On définit les référentiels et bases vectorielles suivantes :

- **Ra**, référentiel galiléen absolu des deux modèles de potentiel (sphérique et perturbé), de base $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, où \vec{i}_3 est porté par $z'z$, \vec{i}_1 et \vec{i}_2 étant situés dans le plan équatorial.

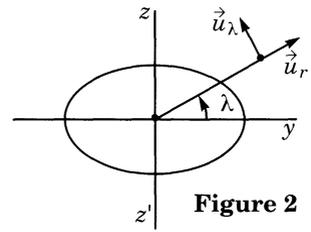


Figure 2

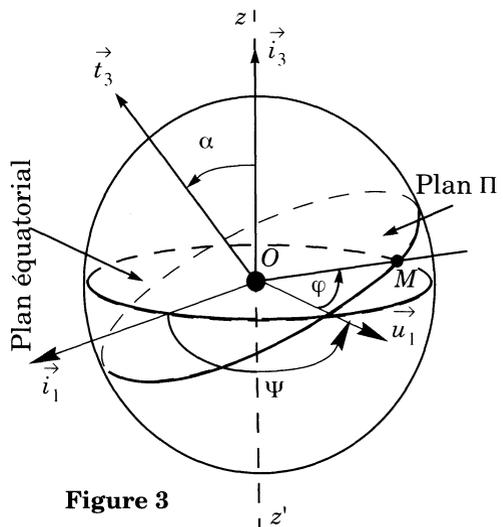


Figure 3

- \mathbf{Ru} , référentiel intermédiaire (fixe dans le premier modèle), de base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{i}_3)$, u_1 étant situé à l'intersection du plan équatorial terrestre et du plan Π . On note $(\vec{i}_1, \vec{u}_1) = \psi$.
- \mathbf{Rt} , référentiel lié au plan Π , de base $(\vec{u}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$, telle que \vec{t}_3 est déduit de \vec{i}_3 , par rotation d'angle α autour de \vec{u}_1 : α est l'angle d'inclinaison de Π sur le plan équatorial de la Terre.
- précession : mouvement dans \mathbf{Ra} du vecteur \vec{u}_1 autour de \vec{i}_3 .
- nutation : mouvement dans \mathbf{Ra} du vecteur \vec{t}_3 autour de \vec{u}_1 .

À cause de la perturbation, la base de \mathbf{Rt} est en mouvement de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à \mathbf{Ra} et \vec{u}_1 tourne autour de \vec{i}_3 à la vitesse angulaire $d\psi/dt$. Selon (H1), le mouvement du satellite dans \mathbf{Rt} est circulaire uniforme et on note $\varphi = (\vec{u}_1, \vec{OM})$.

a) Exprimer $\vec{\Omega}$ en fonction de $d\psi/dt$ et $d\alpha/dt$.

b) Selon (H1), quelle est, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ de \mathbf{Rt} , l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ du satellite M (point matériel de masse m) ? Que vaut alors le produit $\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_O$? Dans toute la suite de la partie I, on fera l'hypothèse suivante : $\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_O = 0$ (hypothèse (H2)). Justifier cette hypothèse.

c) En tenant compte de (H1), donner l'expression vectorielle du théorème du moment cinétique appliqué en O , dans le référentiel \mathbf{Ra} , au satellite M .

d) Montrer, en tenant compte de (H1) et (H2) que : $\vec{\Omega} = m\vec{OM} \cdot (\vec{\sigma}_O \cdot \vec{g}_\lambda) / \sigma_O^2$.

Pour la suite, on admet les relations suivantes :

$$\sin \lambda = \sin \alpha \cdot \sin \varphi \text{ et } \vec{t}_3 \cdot \vec{u}_\lambda = \cos \alpha / \cos \lambda.$$

I.C -

I.C.1) La perturbation \vec{g}_λ (et par suite $\vec{\Omega}$) étant très faible, on recherche la valeur moyenne $\langle \vec{\Omega} \rangle$ de $\vec{\Omega}$ sur une période où φ varie de 0 à 2π . Montrer que :

$$\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{u}_1 \rangle = 0 \text{ et}$$

$$\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{i}_3 \rangle = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \cdot \eta R^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha, \text{ avec } r = OM.$$

Interpréter ces deux résultats.

I.C.2) On impose alors au mouvement de précession du vecteur \vec{u}_1 autour de \vec{i}_3 d'avoir pour vitesse angulaire la vitesse apparente de rotation du soleil dans le repère géocentrique. Quel est son ordre de grandeur numérique ?

- Montrer qualitativement que cette condition répond à une des exigences demandées aux satellites d'observation.

- Écrire l'équation dont l'inclinaison α du plan Π est solution.

Calculer numériquement α pour une altitude $h = 800$ km et $\alpha \in [0, \pi]$.
Conclusion ?

Partie II - Maintien à poste du satellite : étude du module de radionavigation

Pour que le satellite puisse remplir sa mission (télécommunication, observation...), il est nécessaire que ce dernier reste sur son orbite d'évolution. Il est donc impératif de contrôler en permanence le positionnement du satellite pour éventuellement corriger sa trajectoire si celle-ci dévie. Cela est réalisé par le module de navigation spatiale du satellite. Il réalise trois mesures différentes : une mesure d'altitude, une mesure de vitesse et une mesure d'angle. Cette partie se propose d'étudier une réalisation possible de chacune de ces fonctions.

II.A - Mesure d'altitude

On se propose d'étudier la technique de radioaltimétrie MFOC (Modulation de Fréquence à Onde Continue), utilisant un radar MFOC. La mesure de distance vraie est ici effectuée à l'aide d'une mesure de fréquence. Le schéma de principe de la chaîne de mesure est représenté figure 4a.

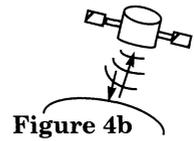


Figure 4b

Le radar émet un signal en direction du sol, figure 4b, (on ne s'intéresse pas ici à l'étude de l'antenne transformant l'information électrique en onde électromagnétique ; quand on parlera de signal émis ou reçu, il s'agira donc de signaux électriques).

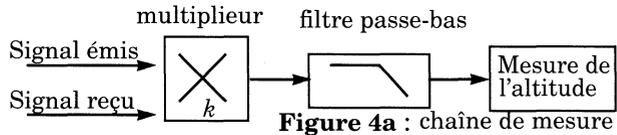


Figure 4a : chaîne de mesure

Le sol réfléchit le signal en direction du satellite. Les deux signaux, émis et reçu, sont alors envoyés à l'entrée de la chaîne de mesure.

Le multiplieur réalise le produit des signaux émis et reçu, avec une constante multiplicative k . À la sortie du multiplieur, le signal est filtré par un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante de plus basse fréquence.

La fréquence $f_e(t)$ du signal émis en direction du sol suit une loi de variation en dents de scie, comme représenté figure 5. Elle est centrée autour de la valeur f_0 . De plus, $\Delta F = f_{e_{max}} - f_{e_{min}} \ll f_0$.

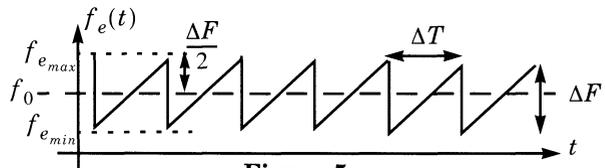


Figure 5

Dans la suite, nous poserons $m(t) = (2\pi/\alpha) \cdot (f_e(t) - f_0)$, avec α constante réelle non nulle.

II.A.1) Génération du signal d'émission

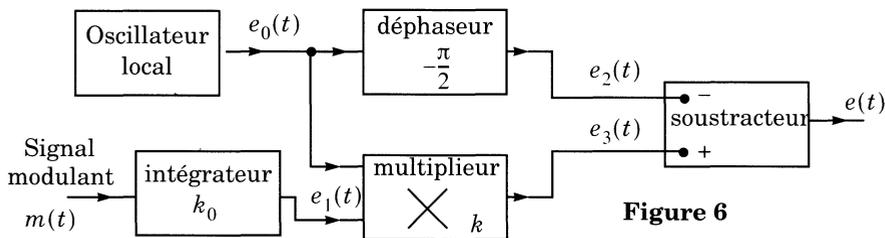
On veut émettre le signal $e(t) = A_e \cdot \cos(\theta_e(t))$, dont la fréquence

$$f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_e(t)}{dt}$$

est représentée figure 5. On réalise alors une modulation de fréquence. En effet, la fréquence de $e(t)$ n'est pas fixe, mais est modulée autour de la fréquence f_0 appelée porteuse. $m(t)$ est le signal modulant. On peut encore écrire $e(t)$ sous la forme $e(t) = A_e \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(t))$, où $d\varphi/dt = \alpha m(t)$.

Pour élaborer ce signal $e(t)$, on utilise un Oscillateur Contrôlé en Tension (OCT), qui permet de contrôler la fréquence du signal de sortie du montage en fonction de la tension en entrée de l'OCT.

On propose le dispositif représenté figure 6 utilisant la synthèse d'Armstrong et nécessitant la présence d'un oscillateur local très stable.



L'oscillateur local fournit le signal $e_0(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ où f_0 est la fréquence de la porteuse. L'intégrateur réalise l'intégration de $m(t)$, avec une constante multiplicative k_0 . On notera $M(t)$ l'intégrale de $m(t)$. Le multiplieur réalise le produit des deux signaux en entrée, avec une constante multiplicative k .

a) Donner l'expression des signaux $e_2(t)$, $e_3(t)$ et $e(t)$.

b) Simplifier l'expression de $e(t)$ dans le cas d'une faible profondeur de modulation ($kk_0M(t) \ll 1$) et comparer son expression avec l'expression $e(t) = A_e \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(t))$ recherchée (avec $m(t) = (2\pi/\alpha) \cdot (f_e(t) - f_0)$).

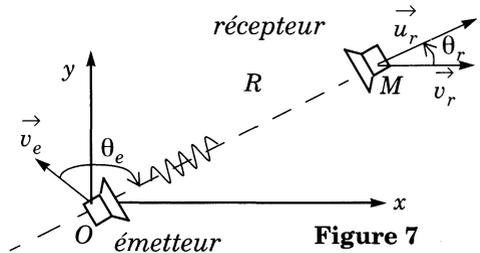
II.A.2) Mesure de l'altitude

On revient au montage de la figure 4a. Le multiplieur est le même que celui utilisé figure 6. On note h l'altitude du satellite. Les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière c , constante toute au long de leur parcours. Le signal reçu est de la forme $r(t) = A_r \cdot \cos(\theta_r(t))$.

- a) Tracer sur un même graphe l'allure de $f_e(t)$ et celle de $f_r(t)$ fréquence du signal reçu.
- b) Étudier et tracer l'allure générale du signal en sortie du multiplieur.
- c) On fait l'hypothèse supplémentaire que $2h < c\Delta T$ (hypothèse (H3)). Donner, en fonction de h , c , ΔT et ΔF l'expression du signal en sortie du filtre passe-bas, supposé de gain statique G_0 . Conclusion ? L'hypothèse (H3) est-elle vraiment nécessaire ?
- d) Proposer une réalisation du filtre passe-bas, et préciser ses caractéristiques pour un fonctionnement correct du circuit.
- e) Voyez-vous des limitations à ce système ?

II.B - Mesure de vitesse

Il existe deux types de mesures de vitesse : une mesure de pseudovitesse et une mesure de vitesse vraie. Le but de cette partie est d'étudier le principe de ces mesures. Dans les deux cas, la mesure de vitesse est basée sur l'effet Doppler : il correspond à la modification de la fréquence d'une onde lorsqu'elle est reçue par un récepteur



en mouvement et/ou lorsqu'elle est émise par un émetteur en mouvement. Ainsi, pour un émetteur mobile de vitesse v_e dans un référentiel R , émettant une onde monochromatique de fréquence f_e , et pour un récepteur mobile de vitesse v_r dans R , la fréquence f_r de l'onde reçue par le récepteur peut s'écrire en première approximation :

$$f_r = f_e \cdot \left(1 - \frac{v_r \cos \theta_r}{c} + \frac{v_e \cos \theta_e}{c} \right).$$

Ainsi, seules les vitesses radiales $V_e = v_e \cos \theta_e$ et $V_r = v_r \cos \theta_r$ de l'émetteur et du récepteur importent et le décalage Doppler vaut :

$$\Delta f_D = f_e \cdot \left(-\frac{v_r \cos \theta_r}{c} + \frac{v_e \cos \theta_e}{c} \right)$$

II.B.1) Étude de l'effet Doppler

- a) Connaissez-vous une manifestation physique de l'effet Doppler ?

On se propose de retrouver l'expression du décalage Doppler dans le cas particulier de la réflexion d'une onde électromagnétique plane harmonique sur une plaque métallique parfaite,

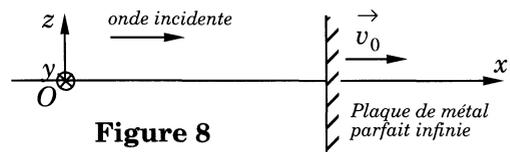


Figure 8

supposée infinie, en translation à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ constante dans le référentiel $R(Oxyz)$ (figure 8).

À $t = 0$, la plaque est en $x = 0$. L'onde incidente est de la forme (\vec{E}_i, \vec{B}_i) avec :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z.$$

L'onde réfléchie est de la forme (\vec{E}_r, \vec{B}_r) avec : $\vec{E}_r = E_r \cos\left(\omega_r \left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$.

Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel R' en translation par rapport à R et dans lequel la plaque est immobile.

b) En notant (\vec{E}, \vec{B}) un champ électromagnétique dans R et (\vec{E}', \vec{B}') le même champ évalué dans R' , montrer que $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ et que $\vec{B}' = \vec{B}$.

c) Exprimer \vec{B}_i en fonction de E_0, c, ω_i, t et x .

Exprimer $\vec{E}'_i, \vec{E}'_r, \vec{B}'_i, \vec{B}'_r$ en fonction de E_0, c, ω_i, t, x et v_0 .

d) En déduire f_r en fonction de f_i, v_0 et c . Comparer ce résultat à celui obtenu en appliquant directement la relation donnant Δf_D .

e) Pourquoi $|E_r| < |E_i|$?

II.B.2) Mesure de la pseudovitesse

La mesure de la pseudovitesse est réalisée lorsque la liaison spatiale est monodirectionnelle : par exemple, une station au sol envoie un signal au satellite qui joue le rôle de récepteur (on se place dans ce cas pour la suite du II.B.2). Les oscillateurs des dispositifs d'émission et de réception sont donc différents. On cherche à exprimer, dans le référentiel R lié à la Terre, la vitesse radiale V_r du satellite par rapport à l'émetteur fixe.

- On note f_e la fréquence du signal sinusoïdal émis et Δf_e l'incertitude sur f_e .
- On note f_{OL} la fréquence de l'oscillateur local du récepteur et Δf_{OL} l'incertitude sur f_{OL} .

La chaîne de mesure est représentée figure 9. Le signal $s_{OL}(t)$ est le signal sinusoïdal produit par l'oscillateur local. Le signal $s_r(t)$ est le signal

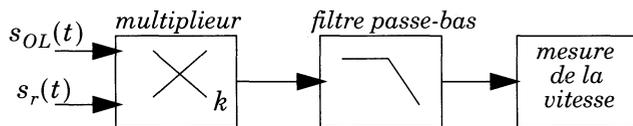


Figure 9 : chaîne de mesure

reçu par le satellite, supposé de même amplitude que $s_{OL}(t)$. Le multiplieur possède les mêmes caractéristiques que celui de la figure 6. Le filtre passe-bas ne conserve que la composante de plus basse fréquence, fréquence notée f_b . La mesure de la fréquence f_b est supposée parfaite (l'incertitude Δf_b sur la mesure est nulle).

a) Montrer que le signal en sortie du filtre passe-bas a pour fréquence

$$f_b = \left| f_e \cdot \left(1 - \frac{V_r}{c} \right) - f_{OL} \right|.$$

b) Les fréquences de l'émetteur et de l'oscillateur local sont maintenant supposées identiques. Donner l'expression de $|V_r|$ et son incertitude $\Delta|V_r|$ (on négligera dans l'expression finale de $\Delta|V_r|$ le terme en V_r/c devant 1). Conclusion ?

c) Peut-on obtenir le signe de V_r ?

II.B.3) Mesure de la vitesse vraie

La liaison spatiale est maintenant bidirectionnelle. On se place alors dans le cas où l'oscillateur émetteur/récepteur est unique. Le signal sinusoïdal de fréquence f_{OL} est émis par le satellite, réfléchi par la Terre et reçu par le satellite.

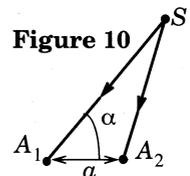
a) La chaîne de mesure restant la même (figure 9), quelle est l'expression de $|V_r|$ en fonction de f_b ? Que vaut $\Delta|V_r|$?

b) Que pensez-vous de la nécessité de disposer d'un oscillateur local très stable dans le cas d'une mesure de vitesse vraie ?

c) Les mesures précédentes estiment seulement la vitesse radiale du satellite. Que proposez-vous pour une estimation de la vitesse \vec{v} du satellite ?

II.C - Mesure d'angles

De nombreux dispositifs permettent la mesure d'angles. Nous nous limiterons à l'étude du principe de mesures interférométriques. Le satellite S , émet un signal radioélectrique (se propageant à la vitesse c), capté par deux récepteurs au sol A_1 et A_2 , et distants de a (figure 10). On note $D_1 = SA_1$, $D_2 = SA_2$ et $\Delta D = D_1 - D_2$. Le but de la mesure est de déterminer l'angle de visée α .



Vu les distances mises en jeu ($A_1A_2 \ll A_1S$ et $A_1A_2 \ll A_2S$) on considérera les rayons incidents parallèles entre eux.

II.C.1) Sachant que le signal émis par S est de la forme $s_e(t) = A_e \cdot \cos(2\pi ft)$, donner l'expression des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ reçus en A_1 et A_2 ; on négligera les atténuations possibles du signal sur son trajet. En déduire l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre le signal reçu en A_2 et celui reçu en A_1 . Donner l'expression de α en fonction de $\Delta\varphi$.

II.C.2) La mesure de $\Delta\varphi$ permet donc d'accéder à la mesure de α . Comment s'effectue pratiquement la mesure de $\Delta\varphi$ dans un dispositif interférométrique à deux ondes ? À quel dispositif classique s'apparente le système étudié ? En faire le schéma de principe ; on placera en particulier sur ce schéma les points S , A_1 et A_2 .

II.C.3) Le système étudié permet-il la mesure de la direction de visée de l'émetteur en orbite ? Si non, proposer une solution possible.

••• FIN •••
