ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2006

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Matrices réelles de partie symétrique positive

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera muni du produit scalaire usuel noté $(.|.)$ et de la norme correspondante $\|.\|$. On notera $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, et I la matrice identité ; on munira $M_n(\mathbf{R})$ de la norme usuelle :

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ ,\ x \neq 0\right\}\ .$$

Une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ sera dite *s-positive* si l'on a $(Ax|x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a.

2. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de A_s, pour que A soit s-positive.

Deuxième partie

3. Montrer que, pour toute matrice s-positive A et tout nombre réel $\lambda > 0$, la matrice $\lambda I + A$ est inversible.

On posera alors $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$.

4. (Étude d'exemples) On examinera les deux exemples suivants :

a) $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour chacun de ces exemples : calculer Ker A, Im A, $R_\lambda(A)$, dire si $R_\lambda(A)$ (resp. $\lambda R_\lambda(A)$) admet une limite lorsque $\lambda \to 0$ et, si oui, donner cette limite.

Dans la suite de cette deuxième partie on se donne une matrice s-positive A et un réel $\lambda > 0$.

5. Démontrer les assertions suivantes :

5.a)
$$AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A) \;.$$

5.b) Pour tout réel $\mu > 0$, on a
$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) \;.$$

6. Démontrer l'inégalité $\|R_\lambda(A)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$, avec égalité si et seulement si $\det A$ est nul.

7. Démontrer les assertions suivantes :

7.a) Pour tout $x \in$ Im A, $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$.

7.b) L'espace $\mathbf{R}^n$ est somme directe de Ker A et Im A.

7.c) Lorsque λ tend vers 0, $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur Ker A parallèlement à Im A.

8. Montrer que l'application $\Phi : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ est indéfiniment dérivable, et exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puissances $\Phi^q : \lambda \mapsto \Phi(\lambda)^q$.

Troisième partie

Dans cette troisième partie on se donne une application F de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda > 0 \,,\ \|F(\lambda)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\,;$

(ii) $\forall \lambda \,,\, \mu > 0 \,,\ F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)\,;$

(iii) $F(1)$ est inversible.

9. Montrer que $F(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.

10.a) Calculer $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1}$.

10.b) Montrer que, lorsque $\lambda \to 0$, $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A et que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I + A = F(\lambda)^{-1}$.

11. Montrer que les matrices $AF(\lambda)$ et A sont s-positives.

Quatrième partie

Étant donné une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$, on pourra admettre les résultats suivants :

(i) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente. Notons $\exp A$ sa somme.

(ii) La fonction de variable réelle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA) \; .$$

12. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) pour tout $t \geqslant 0$, on a $\| \exp(-tA)\| \leqslant 1$;

(ii) pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la fonction $t \mapsto \| \exp(-tA)x\|^2$ est décroissante ;

(iii) A est s-positive.

On fixe maintenant une matrice A s-positive et un réel $\lambda > 0$.

13. Démontrer la convergence des intégrales

$$\rho(\lambda)_{i,j} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\exp(-tA))_{i,j} \, \mathrm{d}t \quad , \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \; .$$

On note $\rho(\lambda)$ la matrice de coefficients $\rho(\lambda)_{i,j}$.

14. Comparer $\rho(\lambda)$ et $R_\lambda(A)$. [On pourra calculer d'abord $A\rho(\lambda) + \lambda\rho(\lambda)$.]

15. On considère le premier exemple de la question **4**. Calculer $\exp(-tA)$, puis $\rho(\lambda)$. Retrouver la valeur de $R_\lambda(A)$ obtenue à la question **4**.

* *
*